ESERCIZIO (FASE DI UN'ONDA PIANA)

Si determini la fase ϕ di una funzione d'onda piana che si propaga lungo una direzione $\vec{d}$ definita da

$$\vec{d} = 2\,\vec{i}_x + 2\,\vec{i}_y$$

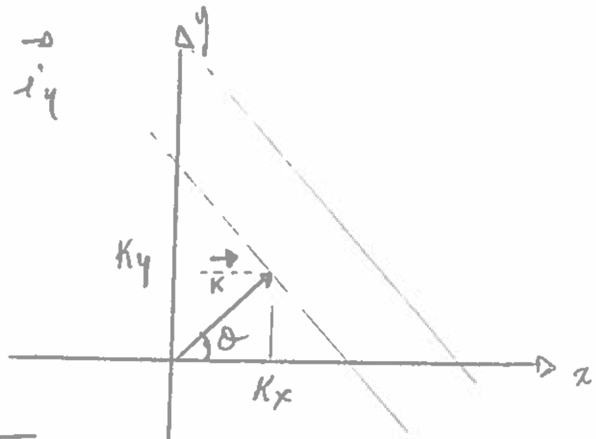
e avente lunghezza d'onda apparente in direzione x pari a $10\,m$. Assumere fase nulla in $x=y=0$ e $d=0$

$$\vec{E}(x,y) = \vec{E}_0\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_0\, e^{-j(k_x x + k_y x)}$$

Dobbiamo trovare k_x e k_y dove $\vec{k} = k_x \vec{i}_x + k_y \vec{i}_y = |\vec{k}|\hat{i}_d$

La direzione di propagazione dell'onda è data dal vettore unitario

$$\vec{i}_d = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{2\vec{i}_x + 2\vec{i}_y}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}_y$$



La lunghezza d'onda reale è legata alla lunghezza d'onda apparente da

$$\lambda_{a,x} = \frac{\lambda}{\vec{i}_d\cdot\vec{i}_x} = \frac{\lambda}{\cos\theta} = \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\lambda$$

quindi $\lambda = \dfrac{\lambda_{a,x}}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\ [m]$

Il vettore $\vec{k}$ è dato da $\vec{k} = |\vec{k}|\,\vec{i}_d$ dove $|\vec{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{5}$

quindi

$$\vec{k} = \frac{\pi\sqrt{2}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}_y\right) = \underbrace{\frac{\pi}{5}}_{k_x}\vec{i}_x + \underbrace{\frac{\pi}{5}}_{k_y}\vec{i}_y$$

da cui $\vec{E} = E_0\, e^{-j\frac{\pi}{5}(x+y)}$

ESERCIZIO (ONDE PIANE UNIFORMI)

Il campo elettrico di un'onda piana uniforme in aria è dato da

$$\vec{E}(x,t) = \vec{i}_z\, 15 \cdot 10^{-2} \cos(1.7\pi \cdot 10^{9} t - \beta x) \; [V/m]$$

a) trovare la costante di fase β e la lunghezza d'onda λ

b) Disegnare $E_z(x,t)$ per $x=0$ e $x=\lambda/4$

c) Disegnare $E_z(x,t)$ per $t=0$ e $t=\pi/\omega$

a) In generale per un'onda piana uniforme vale la relazione

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \longrightarrow \text{in aria } v_f = v_0 = 3 \cdot 10^{8}\, m/s$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \frac{1.7\pi \cdot 10^{9}\, rad/s}{3 \cdot 10^{8}\, m/s} = 17.8\, rad/m$$

La lunghezza d'onda è definita come

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 35,3\, cm$$

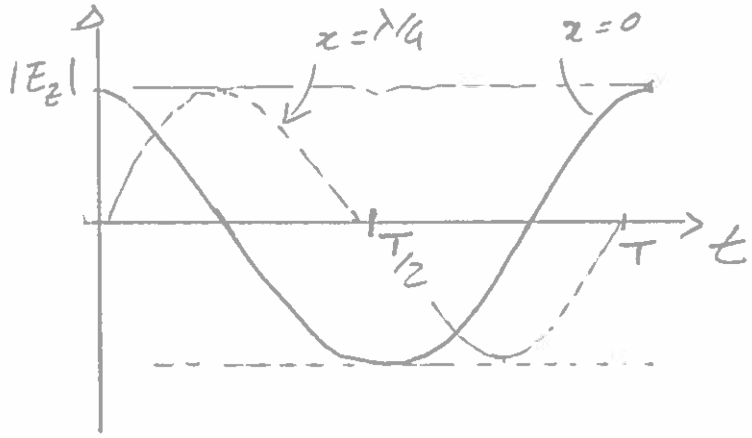
b) $x=0 \Rightarrow E_z(0,t) = 15 \cdot 10^{-2} \cos(1.7\pi \cdot 10^{9} t) \; [V/m]$

periodo $T = \frac{\cancel{2\pi}\,1}{\cancel{2\pi} f} = \frac{2\pi}{\omega} = 1,17\, ns$

$x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow E_z\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = \ldots\ldots \qquad \beta\frac{\lambda}{4} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$= 15 \cdot 10^{-2} \cos\left(1.7\pi \cdot 10^{9} t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 15 \cdot 10^{-2} \sin(1.7\pi \cdot 10^{9} t)$$

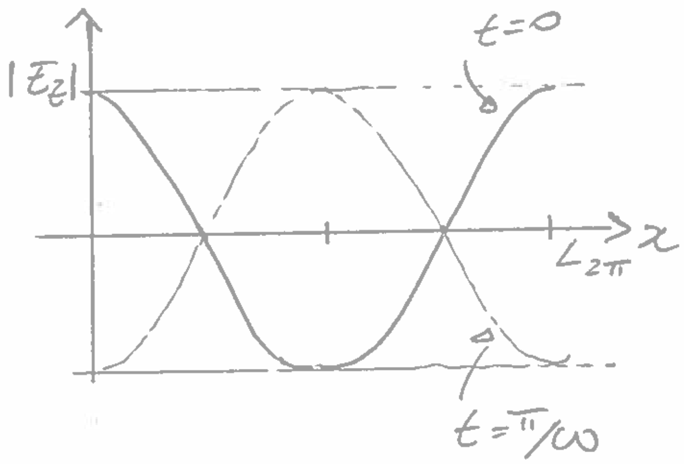


c) $t=0$ $\quad E_z(x,0) = 15\cdot 10^{-2}\cos(-17.8\,x) =$

$$= 15\cdot 10^{-2}\cos(17.8\,x)$$

$t=\frac{\pi}{\omega}$ $\quad E_z\left(x,\frac{\pi}{\omega}\right) = 15\cdot 10^{-2}\cos(\pi - 17.8\,x) =$

$$= -15\cdot 10^{-2}\cos(17.8\,x)$$



Periodo $\beta x = 2\pi$

$$L_{2\pi} = \frac{2\pi}{\beta}$$

Infatti $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$ $\Rightarrow$ ritardo di un semiperiodo

ESERCIZIO (SEGNALE BROADCASTING TV)

Il campo magnetico di un segnale broadcasting TV propagante in aria è dato da

$$\vec{H}(z,t) = \vec{i}_x\, 0{,}1 \sin(\omega t - 9.3\, z)\ [mA/m]$$

a) Trovare la frequenza dell'onda

b) Trovare l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(z,t)$

a) Per un'onda piana uniforme in aria vale la relazione

$$v_f = v_0 = \frac{\omega}{\beta}$$

quindi $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\beta v_0}{2\pi} = \dfrac{9.3\ rad/m \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}{2\pi}$

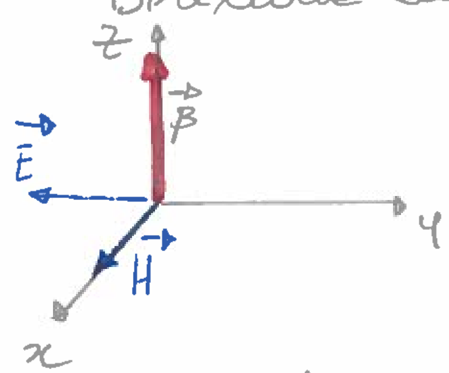
$$= 444\ MHz$$

$\vec{E}_0 = (\vec{H}_0 \times \vec{i}_k)\eta$

b) Direzione di propagazione dell'onda $\longrightarrow \vec{i}_z$

Direzione del campo magnetico $\longrightarrow \vec{i}_x$

$\Big\}$ $\vec{E}$ diretto come $-\vec{i}_y$



Per un'onda piana uniforme

$$\frac{|E_0|}{|H_0|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \ \ldots \text{in aria} = \eta_0 = 120\pi$$

quindi $\vec{E}(z,t) = -\vec{i}_y\, 12\pi \sin(\omega t - 9.3 z)\ [mV/m]$

$$\omega = 2\pi \cdot 444\ MHz$$

ESERCIZIO (TERRA SECCA / UMIDA)

La terra secca e la terra umida hanno conduttività e permettività

$\sigma_{wet} = 10^{-2}$ S/m , $\varepsilon_{wet} = 10\,\varepsilon_0$

$\sigma_{dry} = 10^{-4}$ S/m , $\varepsilon_{dry} = 3\,\varepsilon_0$ $\qquad \mu_r = 1$

a) Determinare la costante di attenuazione, costante di fase β, lunghezza d'onda, velocità di fase, profondità di penetrazione, impedenza intrinseca alla frequenza di 20 MHz

Usare espressioni approssimate dove possibile

In un mezzo non ideale (ε, μ complessi o $\sigma \neq 0$) e' espressione generale del k vale

$$k^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

Nel caso in esame $\mu_r = 1$, $\varepsilon'' = 0$ $\longrightarrow$ $k^2 = -j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon')$

Per vedere se si possono usare approssimazioni calcoliamo la tangente di perdita nei 2 casi

$$\tan\phi = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f\,\varepsilon_r'\,\varepsilon_0}$$

$\longrightarrow \tan\delta_{wet} = 0.9 \approx 1$ NO approx

$\longrightarrow \tan\delta_{dry} = 0.03 \ll 1$ buon dielettrico

a) TERRA UMIDA $\qquad k^2 = (\beta - j\alpha)^2$

$$\beta - j\alpha = \sqrt{-j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon_{wet})} = \sqrt{-j\underbrace{2\cdot\pi\cdot 20\cdot 10^{6}}_{\omega}\cdot\underbrace{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}}_{\mu_0}\cdot\ldots}$$

$$\ldots\overline{(10^{-2} + j\,2\cdot\pi\cdot 20\cdot 10^{6}\cdot 10\cdot 8.85\cdot 10^{-12})} = \pm\,\cancel{0.55} - j\,\cancel{1.43} \quad [m^{-1}]$$

$\pm 1{,}43 - j\,0{,}55$

$\beta = \cancel{0,55}$ [rad/m] 1,43

$\alpha = \cancel{1.43}$ [Np/m] 0.55

Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\cancel{0.55}\ 1,43 \text{ rad/m}} = 4.39$ [m]

Velocità di fase $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^{6} \text{ rad/s}}{1.43 \text{ rad/m}} = 8.78 \cdot 10^{7}$ [m/s]

Profondità di penetrazione $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.55 \text{ [Np/m]}} = 1,82$ m

Impedenza intrinseca

siccome $\sigma \neq 0$, bisogna definire una costante dielettrica efficace $\varepsilon_{eff} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_r' \varepsilon_0 - j\frac{\sigma}{\omega}$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{eff}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{wet} - j\frac{\sigma_{wet}}{2\pi f}}} \cong 102.7\, e^{j21^\circ} [\Omega] \cong 96 + j36.8\ [\Omega]$$

b) <u>TERRA SECCA</u> (buon dielettrico)

$\beta_{dry} \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} = 0.726$ [rad/m]

$\alpha_{dry} \simeq \frac{\beta}{2} \tan\delta_{dry} = 0.0109$ [Np/m]

$\lambda_{dry} = \frac{2\pi}{\beta_{dry}} = 8.66$ [m]

$v_{f,d} = \frac{\omega}{\beta_{dry}} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 10^{6} \text{ [rad/s]}}{0,726 \text{ [rad/m]}} = 1.73 \cdot 10^{8}$ [m/s]

$$\delta_{dq} = \frac{1}{\alpha_{dq}} = 91,7 \quad [m]$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{eff}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon'}} \Big(1 - j \underbrace{\frac{\sigma}{\omega \varepsilon'}}_{\ll 1} \Big)^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon'}} \Big(1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \varepsilon'} \Big)$$

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon' - j \frac{\sigma}{\omega}$$

$$\cong 218 e^{j 0.86°} \quad [\Omega]$$

$$= 217,5 + j\, 3.26 \quad [\Omega]$$

se considerassi il materiale come ideale

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 217,65$$ (fase nulla)

non commettere un grosso errore

ESERCIZIO (MEZZO NON MAGNETICO SENZA PERDITE)

Il vettore induzione magnetica di un'onda piana uniforme propagante in un mezzo non magnetico senza perdite ($\mu = \mu_0$) è data da

$$\vec{B}(x,t) = \vec{i}_y \, 0{,}25 \sin\left[2\pi\left(10^8 t + 0.5x - 0.125\right)\right] \quad [\mu T]$$

a) Calcolare frequenza, lunghezza d'onda, velocità di fase

b) Calcolare permettività dielettrica relativa ε_r e impedenza intrinseca η del mezzo

c) calcolare campo elettrico $\vec{E}$

d) calcolare densità potenza media portata dall'onda

---

a) Frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^8 \text{ Hz} = 100 \text{ MHz}$

Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 0.5} = 2 \text{ m}$

Velocità di fase $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^8 \text{ rad/s}}{2\pi \cdot 0.5 \text{ rad/m}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

b) Per un'onda uniforme $\beta = K$ quindi

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{\varepsilon_r}$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\beta v_0}{\omega} \qquad \varepsilon_r = \left(\frac{\beta v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{v_f}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 = 2{,}25$$

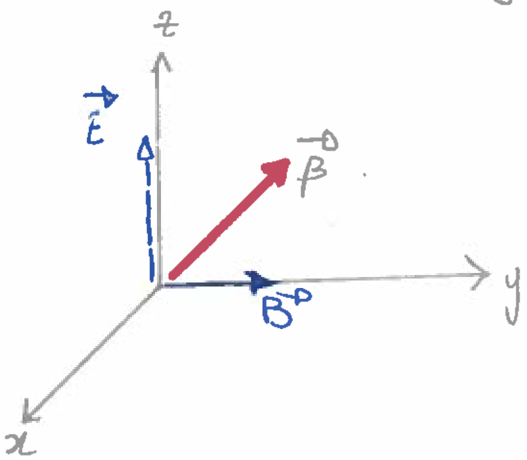
Impedenza del mezzo: per un'onda uniforme

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \eta_0 = 80\pi \ [\Omega]$$

c) Direzione dell'onda: $-\vec{i}_x$

Direzione campo magnetico: $\vec{i}_y$

$\vec{E}$ diretto come $\vec{i}_z$



$$|\vec{B}| = 0,25 \ \mu T$$

$$|\vec{H}| = \frac{|\vec{B}|}{\mu_0} = \frac{0,25 \cdot 10^{-6} \, T}{4\pi \cdot 10^{-7} \, H/m} = 0,2 \ A/m$$

$$|\vec{E}| = \eta |\vec{H}_0| = 80\pi \, [\Omega] \cdot 0,2 [A/m] = 50 [V/m]$$

$$\vec{E}(x,t) = \vec{i}_z \, 50 \sin\left[2\pi\left(10^8 t + 0.5x - 0,125\right)\right] \ [V/m]$$

d) Vettore di poynting $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$

$$\vec{E}(x) = \vec{i}_z \, 50 \, e^{j(\pi x - 0,25\pi)} \quad [V/m]$$

$$\vec{H}(x) = \vec{i}_y \frac{50}{\eta} e^{j(\pi x - 0,25\pi)} \quad [A/m]$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = (\vec{i}_z \times \vec{i}_y) \frac{50^2}{2\eta} = -\vec{i}_x 4.97 \quad W/m^2$$

Densità di potenza $|\vec{S}| = 4.97 \ W/m^2$

ESERCIZIO (MURO DI CALCESTRUZZO)

La costante dielettrica relativa complessa del muro di un edificio è

$\varepsilon_r = 6.7 - j\,1.2$ @ 900 MHz

$\varepsilon_r = 6.2 - j\,0.69$ @ 1.8 GHz

} wireless communications applications

Trovare lo spessore del muro che causa una attenuazione di 10 dB alla frequenza di:

a) 900 MHz

b) 1.8 GHz

(... trascurare gli effetti di riflessione)

Per prima cosa calcoliamo il $\tan\delta$ in entrambi i casi

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} = \begin{cases} 0{,}18 & @\,900\text{ MHz} \\ 0{,}11 & @\,1{,}8\text{ GHz} \end{cases} \approx 1$$

non si possono usare espressioni approx

$$k^2 = (\beta - j\alpha)^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \qquad \begin{matrix}\mu = \mu_0 \\ \sigma = 0\end{matrix}$$

$$= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')$$

$$\alpha = |\mathrm{Imag}(\sqrt{k^2})| = |\mathrm{Imag}(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''})| = \begin{cases} 4.35\ \text{Np/m} & (@\,900\text{ MHz}) \\ 5.21\ \text{Np/m} & (@\,1.8\text{ GHz}) \end{cases}$$

$$\alpha_{dB/m} = \alpha_{Np/m} \cdot 8{,}686 = \begin{cases} 37.78\ \text{dB/m} & (900\text{ MHz}) \\ 45.25\ \text{dB/m} & (1{,}8\text{ GHz}) \end{cases}$$

Max spessore d del muro per avere 10 dB attenuazione

$$\alpha_{ass_{dB}} = \alpha_{dB} \cdot d = 10\ dB$$

$$d = \frac{10\ dB}{\alpha_{dB}} \begin{cases} 26.5\ cm & @\ 900\ MHz \\ 22.1\ cm & @\ 1{,}8\ GHz \end{cases}$$

Se avessimo usato le approx di buoni dielettr. avremmo trovato risultati non molto diversi.

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \tan\delta = \frac{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r'}}{2} \tan\delta = \begin{cases} 4.37\ Np/m & (900\ MHz) \\ 5.16\ Np/m & (@1{,}8\ GHz) \end{cases}$$

$$\alpha_{dB} = \begin{cases} 37{,}96\ dB/m \rightarrow d = 26{,}3\ cm & (0.7\%) \\ 44.81\ dB/m \rightarrow d \cong 22.3\ cm & (0.9\%) \end{cases}$$

ESERCIZIO (TESSUTO MUSCOLARE)

Per sviluppare tecniche di riscaldamento a radiofrequenze per la cura di patologie tumorali, è necessario determinare l'energia assorbita da un oggetto esposto a radiazione EM in un vasto intervallo di frequenze.
Un muscolo artificiale usato per simulare il comportamento di un muscolo reale ha

$\varepsilon_r = 51,1$
$\sigma = 1,27$ S/m @ 915 MHz

a) Calcolare la profondità di penetrazione δ
b) Calcolare δ alla frequenza di 2,45 GHz dove

$\varepsilon_r = 47,4$
$\sigma = 2,17$ S/m.

Quale frequenza penetra più in profondità?

c) Calcolare in entrambi i casi l'attenuazione in dB su uno spessore di 1,5 cm.

$\longmapsto$

Calcoliamo la tangente di perdita in entrambi i casi.

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \begin{cases} 0.488 & @ 915 \text{ MHz} \\ 0.33 & @ 2.45 \text{ GHz} \end{cases} \Big\} \simeq 1$$

no approx possibili

$$K^2 = (\beta - j\alpha)^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$
$$= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r' - j\omega\mu_0\sigma$$

$$\alpha = \mathrm{Imag}\sqrt{K^2} = \begin{cases} 32.56\ [Np/m] & @\ 915\ MHz \\ 58.58\ [Np/m] & @\ 2.45\ GHz \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \begin{cases} 3{,}07\ cm & @\ 915\ MHz \Rightarrow \text{più penetrante} \\ 1{,}7\ cm & @\ 2{,}45\ GHz \end{cases}$$

b) $$\alpha_{dB} = \alpha_{Np} \cdot 8.686 = \begin{cases} 282.8\ dB/m \\ 508.8\ dB/m \end{cases}$$

Attenuazione attraverso $d = 1{,}5\ cm$

$$Loss_{dB} = \alpha_{dB} \cdot d = \begin{cases} 4.25\ dB & @\ 915\ MHz \\ 7.63\ dB & @\ 2.45\ GHz \end{cases}$$

ESERCIZIO (TESSUTO BIOLOGICO SCONOSCIUTO)

Il campo elettrico di un'onda piana che si propaga in un tessuto biologico è dato da

$$\vec{E}_{(y,t)} = \vec{i}_x\, 0.5\, e^{-39y} \cos(1.83\pi \cdot 10^9 t - 141 y) \ [V/m]$$

a) Assumendo $\mu_r = 1$ e $\sigma = 0$, calcolare $\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r''$

b) Scrivere l'espressione del campo magnetico

c) Scrivere l'espressione del vettore di Poynting

La frequenza dell'onda è $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1.83\pi \cdot 10^9 \ [rad/m]}{2\pi} =$

$= 915 \ MHz$

Dall'espressione del campo elettrico si ricavano direttamente

$\alpha = -39 \ [Np/m]$

$\beta = 141 \ [rad/m]$

Poiché non sappiamo se il mezzo è un buon dielettrico o conduttore, dobbiamo usare l'espressione generale per k

$$k^2 = (\beta - j\alpha)^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = \dots \qquad \begin{matrix}\mu = \mu_0 \\ \sigma = 0\end{matrix}$$

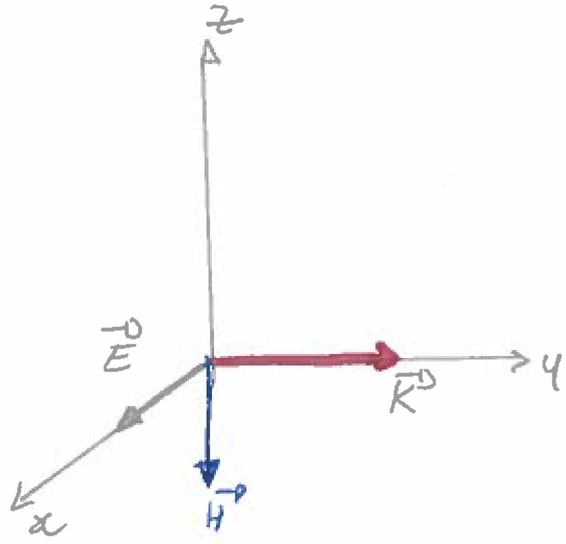
$$= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')$$

$$\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' = \frac{(\beta - j\alpha)^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} = 50 - j30 \ [\ ]$$

$\varepsilon_r' = 50$

$\varepsilon_r'' = 30$

b) Direzione del campo magnetico



$$\vec{K} \to \vec{i}_y,\quad \vec{E} \to \vec{i}_x \implies \vec{H} \to -\vec{i}_z$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')}}$$

$$= \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''}} = 49.39\, e^{j15.46^\circ} \quad [\Omega]$$

$$\vec{H}(y,t) = -\vec{i}_z \frac{E_0}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta y - \measuredangle\eta)\, e^{-\alpha y}$$

$$= -\vec{i}_z\, 10{,}1\, e^{-39y} \cos(1{,}83\pi \cdot 10^9 t - 141 y - 15{,}46^\circ) \quad [mA/m]$$

c) Scriviamo $\vec{E}$ e $\vec{H}$ nel dominio dei vettori d'onda

$$\vec{E}(y) = \vec{i}_x\, 0.5\, e^{-39y} e^{-j141y} \quad [V/m]$$

$$\vec{H}(y) = -\vec{i}_z\, 10.1\, e^{-39y} e^{-j141y} e^{-j15.46^\circ} \quad [mA/m]$$

$$\vec{S}_p = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{i}_y\, 2.5\, e^{-78y} e^{j15{,}46^\circ} \quad [mW/m^2]$$

$$= \vec{i}_y \left[\underbrace{2{,}44\, e^{-78y}}_{\text{Potenza reale}} + j\underbrace{0{,}65\, e^{-78y}}_{\text{Potenza reattiva}}\right]$$

ESERCIZIO (GHIACCIAIO)

La profondità di penetrazione di un'onda EM nel ghiaccio di un ghiacciaio con tangente di perdita $\tan\delta = 0.001$ in banda X ($\lambda_0 = 3$ cm in aria) è

$\delta = 5.41$ m

a) Calcolare la costante dielettrica e la conducibilità equivalente ($\sigma_{eq} = \sigma + \omega\varepsilon''$) del ghiaccio ($\mu_r = 1$)

b) Calcolare l'attenuazione in dB/m

Siccome $\tan\delta \ll 1$ possiamo usare le approssimazioni di buon dielettrico

$$\begin{cases} \alpha \cong \dfrac{\beta}{2}\tan\delta & (1) \\ \beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} & (2) \end{cases}$$

Calcoliamo la frequenza $f = \dfrac{v_0}{\lambda_0} = \dfrac{3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10$ GHz

Dalla profondità di penetrazione $\delta = \dfrac{1}{\alpha}$, usando la (1) ricaviamo β

$$\frac{\beta}{2}\tan\delta = \frac{1}{\delta} \Longrightarrow \beta = \frac{2}{\delta\tan\delta} = 369,7\ [\text{rad/m}]$$

Dalla (2) si ricava la costante dielettrica ε_r'

$$\beta \approx 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r'} \Longrightarrow \varepsilon_r' = \left(\frac{\beta}{2\pi f}\right)^2\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = 3.11$$

La conducibilità equivalente si ricava dalla definizione della tangente di perdita

$$\tan\delta = \frac{\sigma_{eq}}{\omega \varepsilon_r' \varepsilon_0}$$

$$\sigma_{eq} = 2\pi f \, \varepsilon_r' \varepsilon_0 \tan\delta = 1{,}7 \ mS/m$$

b) L'attenuazione in Np/m è $\alpha = \frac{1}{\delta} = 0{,}185 \ Np/m$

Per convertire da Np/m a dB/m bisogna moltiplicare per 8,686

$$\alpha \, [dB/m] = 8.686 \, \alpha \, [Np/m] = 1{,}61 \ [dB/m]$$

ESERCIZIO (DISPERSIONE IN ACQUA DI MARE)

In un mezzo conduttivo la velocità di propagazione di un'onda piana dipende dalla frequenza (dispersione)

a) in acqua di mare ($\sigma = 4\, S/m$, $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$), mostrare che a frequenze < 890 MHz la velocità di fase può essere espressa come $v_p = C_1 \sqrt{f}$, con C_1 costante. Quanto vale C?

b) Considerare due segnali a frequenze $f_1 = 1\,kHz$ e $f_2 = 2\,kHz$. Se i due segnali propagano nella stessa direzione e sono in fase in $z=0$, qual è il ritardo di fase dopo 100 m?

---

a) La frequenza di 890 MHz è la frequenza alla quale $\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1$ per l'acqua di mare.

Per $f \ll 890\,MHz$, $\tan\delta \gg 1$, quindi l'acqua si comporta da buon conduttore.

Quindi $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \underbrace{\sqrt{\pi\mu\sigma}}_{C_1}\sqrt{f} \Rightarrow$ ~~$C_1 = \sqrt{\pi\mu\sigma} =$~~

La velocità di fase v_p è data da

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{4\pi f}{\mu\sigma}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{\mu\sigma}}}_{C_1}\sqrt{f} \qquad C_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu\sigma}} = 1581\,[m/\sqrt{s}]$$

b) Ritardo di fase $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \beta_1 z - \beta_2 z = (\beta_1 - \beta_2) z$

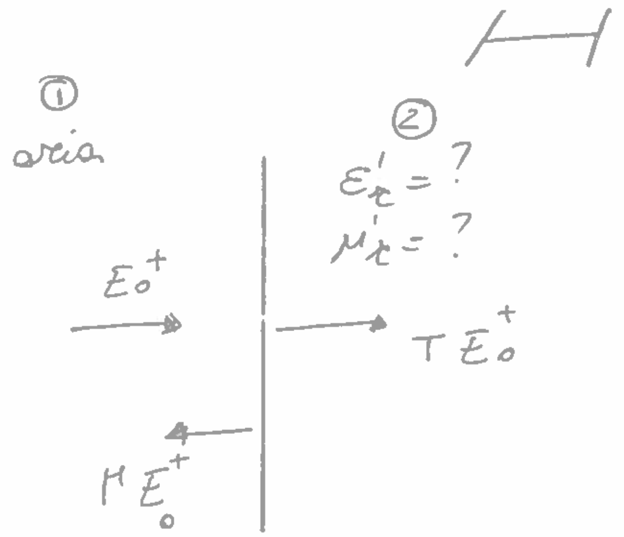
$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi \mu \sigma f} \begin{cases} 0{,}125 \ [rad/m] \ @ f_1 = 1kHz \\ 0{,}177 \ [rad/m] \ @ f_2 = 2kHz \end{cases}$$

Dopo $z = 100$ m

$$\Delta\phi = (\beta_1 - \beta_2) L = 0{,}052 \ \frac{rad}{m} \cdot 100 m \sim 5{,}2 \ rad \ (298°)$$

ESERCIZIO (INCIDENZA NORMALE)

Quando un'onda piana che si propaga in aria incide su un materiale planare senza perdite, il coefficiente di riflessione è -0.25 e la velocità di fase si riduce di un fattore 3. Calcolare la permettività e permeabilità relative del mezzo.



In un mezzo senza perdite

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

dove $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \ [\Omega]$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r'}{\varepsilon_r'}}$$

- Prima condizione $\Gamma = -0.25$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \Longrightarrow \eta_2 = \eta_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{0.75}{1.25}\eta_0 = 0.6\,\eta_0$$
$$= 72\pi \ [\Omega]$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_r'}{\varepsilon_r'}} = 0.6 \Longrightarrow \frac{\mu_r'}{\varepsilon_r'} = 0.36 \qquad (a)$$

- Seconda condizione $v_{p,2} = \dfrac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_r' \mu_r'}} = \dfrac{v_0}{3}$

$$\sqrt{\varepsilon_r' \mu_r'} = 3 \Longrightarrow \varepsilon_r' \mu_r' = 9 \qquad (b)$$

Dividendo la (b) per la (a)

$$\varepsilon_r'^2 = 25 \Longrightarrow \varepsilon_r' = 5$$
$$\mu_r' = 0.36 \cdot \varepsilon_r' = 1.8$$

ESERCIZIO (INTERFACCIA ARIA-CALCESTRUZZO)

Un'onda piana uniforme ($f = 1$ GHz) incide normalmente su un muro di calcestruzzo. La costante dielettrica a 1 GHz è

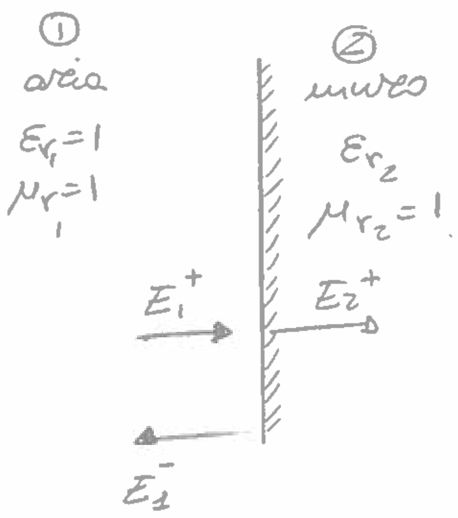
$\varepsilon_{r_{wet}} = 14.8 - j\,1.73$ (calcestruzzo umido)

$\varepsilon_{r_d} = 4.5 - j\,0.03$ (calcestruzzo secco)

a) calcolare la percentuale di potenza riflessa

b) " la profondità di penetrazione

(Assumere spessore infinito del muro)



$$\varepsilon_{r_2} = \begin{cases} 14.8 - j\,1.73 & \text{(wet)} \\ 4.5 - j\,0.03 & \text{(dry)} \end{cases}$$

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} = \begin{cases} 0.11 \sim 1 & \text{(wet)} \\ 6.7 \cdot 10^{-3} \ll 1 & \text{(dry)} \quad \text{buon dielettrico} \end{cases}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \qquad \eta_1 = \eta_0 = 120\pi \ [\Omega]$$

Calcestruzzo umido

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''}} = 97.5 + j\,5.68 \ [\Omega]$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 0.589\, e^{j\,178.15^\circ}$$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{S}_p^+| &= \frac{1}{2} |E^+ \times H^{+*}| = \frac{1}{2}\frac{|E^+|^2}{\eta_0} \\ |\vec{S}_p^-| &= \frac{1}{2}\frac{|E^-|^2}{\eta_0} = \frac{1}{2}\frac{|\Gamma|^2 |E^+|^2}{\eta_0} \end{aligned}\right\} \quad \frac{|\vec{S}_p^-|}{|\vec{S}_p^+|} = |\Gamma|^2 \Rightarrow 34.7\,\%$$

Calcestruzzo secco (buon dielettrico)

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''}} \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r'}} = 177.72 [\Omega]$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = -0.359 \implies |\Gamma|^2 = 12.9\%$$

b) Profondità di penetrazione $\delta = \frac{1}{\alpha}$

α wet: $k^2 = (\beta - j\alpha)^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = \omega^2\mu\varepsilon$

$$\alpha = \mathrm{Imag}\left(\sqrt{k^2}\right) = \mathrm{Imag}\left(\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon}\right) = \mathrm{Imag}\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r}\right) = 4.7 [Np/m]$$

dry: buon ~~conduttore~~ dielettrico

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{\beta}{2} \tan\delta \\ \beta &\cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \end{aligned}\right\} \alpha \approx \frac{\omega}{2}\sqrt{\mu\varepsilon'} \tan\delta = 0.149 [Np/m]$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \begin{cases} 21.3 \text{ cm} & \text{(wet)} \\ 6.71 \text{ m} & \text{(dry} \end{cases}$$

ESERCIZIO (Interfaccia aria - GaAs)

Un onda piana uniforme con campo magnetico

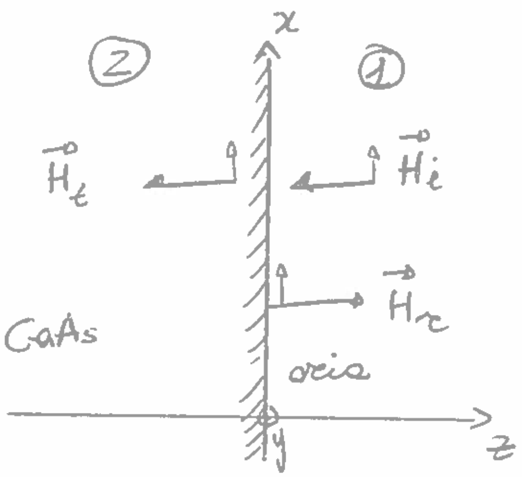
$$\vec{H}(z) = \hat{i}_x 10 \, e^{j210z} \quad [mA/m]$$

incide normalmente su un piano di GaAs posizionato in $z=0$. Assumere il GaAs come dielettrico perfetto con $\varepsilon_r' = 13$

a) Calcolare $\vec{H}_r(z)$ e $\vec{H}_t(z)$

b) Calcolare densità di potenza di onda incidente, riflessa e trasmessa

c) Trovare l'espressione del campo magnetico totale in aria e disegnarne l'andamento per $0<z<3$ cm.



NB L'onda si propaga in direzione $-z$

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \; [\Omega]$$

$$\eta_2 = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{13}} = 104.55 \; [\Omega]$$

Calcoliamo coefficienti di riflessione e trasmissione

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.566$$

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.434$$

NB Questi sono i coefficienti di riflessione e trasmissione del campo elettrico, non magnetico!

infatti $\left.\frac{H_r}{H_i}\right|_{z=0} = -\frac{Y_1 \Gamma}{Y_1} = -\Gamma$ dove $Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\eta_1}$ ammettenza d'onda

$$\left.\frac{H_t}{H_i}\right|_{z=0} = \frac{Y_2}{Y_1} T = \frac{\eta_1}{\eta_2} T = \frac{T}{1/\sqrt{\varepsilon_r}} = \sqrt{13}\, T$$

Quindi

$$\vec{H}_r(z) = \hat{i}_x\, 10(-H)\, e^{-j\,210 z} = \hat{i}_x\, 5.66\, e^{-j\,210 z} \quad [mA/m]$$

$$\vec{H}_t(z) = \hat{i}_x\, 10(\sqrt{13}\,T)\, e^{j\,210 z} = \hat{i}_x\, 15.7\, e^{j\,210 z} \quad [mA/m]$$

b) Scriviamo le espressioni del campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}) = \eta\, \vec{H}_0 \times \vec{i}_k\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

<u>incidente</u> direzione $\hat{y} = \vec{i}_n$ $\quad \dfrac{E_i}{H_i} = \eta_1 = \eta_0 = 120\pi$ $\quad i_n$

$$\vec{E}_i(z) = \hat{y}\, 10\, \eta_0\, e^{j\,210 z} = \hat{y}\, 3{,}87\, e^{j\,210 z} \quad [V/m]$$

$$\vec{S}_{p,i} = \frac{1}{2} \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* = -\hat{z}\, \frac{1}{2} \underset{V/m}{(3{,}87)} \underset{A/m}{(0.01)} = -\hat{z}\, 18.9 \quad [mW/m^2]$$

<u>riflessa</u> direzione $-\hat{y}$ $\quad \dfrac{E_r}{H_r} = \eta_0$

$$\vec{E}_r(z) = -\hat{y}\, 5.66\, \eta_0\, e^{-j\,210 z} = -\hat{y}\, 2.134\, e^{-j\,210 z} \quad [V/m]$$

$$\vec{S}_{p,r} = \frac{1}{2} \vec{E}_r \times \vec{H}_r^* = \hat{z}\, \frac{1}{2} \underset{V/m}{(2.134)} \underset{mA/m}{(5.66)} = -\hat{z}\, \frac{12.08}{2} \; [mW/m^2]$$

$$= 6{,}03 \; mW/m^2$$

<u>trasmessa</u> direzione $\hat{y}$ $\quad \dfrac{E_t}{H_t} = \eta_2 = 104.55\ \Omega$

$$\vec{E}_t(z) = \hat{y}\, 15.7\, \eta_2\, e^{j\,210 z} = \hat{y}\, 1.64\, e^{+j\,210 z} \quad [V/m]$$

$$\vec{S}_{p,t} = \frac{1}{2} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* = -\hat{z}\, \frac{1}{2} \underset{V/m}{(1.64)} \underset{mA/m}{(15.7)} = 12.9 \; mW/m^2$$

c) Campo magnetico totale in aria

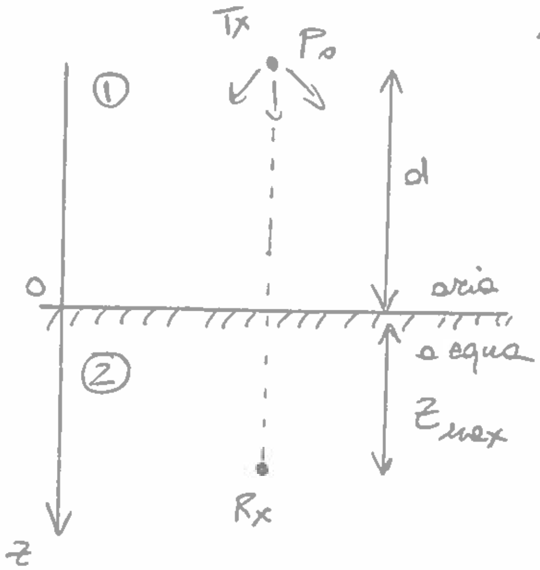
$$\vec{H}_{aria}(z) = \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) = \hat{i}_x \left[10\, e^{j\,210 z} + 5{,}66\, e^{-j\,210 z} \right] \quad [mA/m]$$

ESERCIZIO (COMUNICAZIONE AEREO - SOTTOMARINO)

Un sottomarino immerso nell'oceano comunica con un aereo, equipaggiato con un trasmettitore VLF a 20 KHz, posizionato a 10 Km dalla superficie. Se il trasmettitore dell'aereo ha una potenza di 200 KW e il ricevitore ha una sensibilità di $1 \mu V/m$, calcolare la massima profondità a cui può andare il sottomarino.

Assumere che il trasmettitore stia irradiando la potenza isotropicamente e assumere incidenza normale.

Usare $\sigma = 4\ S \cdot m^{-1}$, $\varepsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$ per l'acqua di mare.



$$P_0 = 2 \cdot 10^5 [W]$$
$$d = 10^3 [m]$$
$$E_{min, Rx} = 1 \mu V/m$$

Poiché il trasmettitore emette in modo isotropo, la densità di potenza dell'onda incidente sulla superficie del mare è

$$|S_r| = \frac{1}{2} \frac{|E_1^+|^2}{\eta_0} = \frac{P_0}{4\pi d^2}$$

Quindi il campo elettrico incidente è

$$|E_1^+| = \left(\frac{2\eta_0 P_0}{4\pi d^2} \right)^{1/2} = 0,346 \ [V/m]$$

Alla frequenza di 20 KHz la tangente di perdita dell'acqua

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} = 4.44 \cdot 10^4 \gg 1 \implies \underline{\text{buon conduttore}}$$

L'impedenza d'onda in acqua è quindi data da

$$\eta_2 = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\,0.1405 \quad [\Omega]$$

Il campo elettrico immediatamente sotto la superficie (= campo trasverso) è quindi

$$|E_2^+| = |T\,E_1^+| \qquad \text{dove} \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = 0{,}0011\,e^{j44.98}$$

Da cui $|E_2^+| = |T|\,|E_1^+| = 364\,[\mu V/m]$

L'onda si propaga in acqua con andamento

$$E_2^+(z) = |E_2^+(0)|\,e^{-\alpha z}\,e^{-j\beta z}$$

$$|E_2^+(z_{max})| = |E_2^+(0)|\,e^{-\alpha z_{max}} > 1\,\mu V/m = E_{min\,RX}$$

$$\Rightarrow 364\,e^{-\alpha z_{max}} > 1\,\mu V/m$$

in un buon conduttore

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = 0{,}562\ Np/$$

$$z_{max} < -\frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{1}{364}\right) = \alpha^{-1}\log(364) \cong 10.5\ m$$

$$z_{max} < \alpha^{-1}\log\left(\frac{|E_2^+(0)|}{|E_{min,rx}|}\right)$$

ESERCIZIO (SOTTOMARINO VICINO AL DELTA DI UN FIUME)

Un sottomarino immerso nel mare ($\sigma = 4\ S/m$, $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$) vuole ricevere un segnale da un trasmettitore VLF operante a 20 KHz.

a) Quanto deve essere vicino alla superficie per ricevere 0.1% dell'ampiezza del segnale alla superficie del mare?

b) Ripetere il calcolo se il sottomarino si trova vicino al delta di un fiume (σ dieci volte inferiore)

a) Calcoliamo la tangente di perdita

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_r \varepsilon_0} = 4.44 \cdot 10^{4} \gg 1$$ buon conduttore

Quindi per l'attenuazione usiamo l'espressione

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^{4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2}} = 0{,}56\ Np/m$$

L'ampiezza dell'onda si attenua come

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha L} \Rightarrow \frac{E(z)}{E_0} = e^{-\alpha L} = 0.1\% = 10^{-3}$$

$$\alpha L = 3 \log 10 \Rightarrow L = \frac{3}{\alpha} \log 10 = 12{,}3\ m$$

b) L'acqua vicino al delta del fiume si comporta ancora da buon conduttore

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 4.44 \cdot 10^{3} \gg 1$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = 0{,}177\ Np/m$$

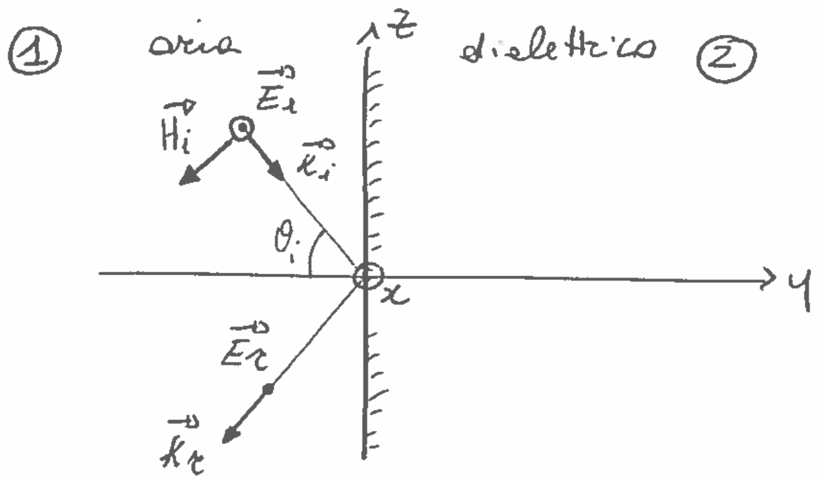
$$L = \frac{3}{\alpha} \log 10 = 38{,}9\ m$$

ESERCIZIO (INCIDENZA OBLIQUA: ONDA POLARIZZATA TE)

Un'onda piana uniforme viaggia in aria con campo elettrico

$$\vec{E}_i(y,z) = \vec{i}_x E_0 e^{-j\beta_1(y\cos\theta_i - z\sin\theta_i)}$$

incide obliquamente all'interfaccia $y=0$ tra due semispazi



$\sigma_2 = 0$
$\varepsilon_r = 2{,}56$
$\mu_r = 1$

$f = 3$ GHz
$\theta_i = 58°$
$S_{p,i} = 1{,}4\ \mathrm{W/m^2}$

La potenza media è pari a $1{,}4\ \mathrm{W/m^2}$, la frequenza vale 3 GHz, e angolo di incidenza è pari a 58°.

Calcolare a) E_0 e β_1

b) $\vec{H}_i(y,z)$; $\vec{E}_r(y,z)$, $\vec{H}_r(y,z)$

c) densità di potenza media dell'onda riflessa e trasmessa

a) L'ampiezza E_0 si ricava dalla densità media di potenza

$$S_{p,i} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*\right] = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_1} \qquad \eta_1 = \eta_0 = 120\pi\ [\Omega]$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{2 S_{p,i}\eta_1} = 32{,}5\ [\mathrm{V/m}]$$

In un mezzo ideale (aria) $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \dfrac{\omega}{c} =$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9\ [\mathrm{rad/s}]}{3\cdot 10^8\ [\mathrm{m/s}]} = 20\ [\mathrm{rad/m}]$$

b) Il campo magnetico incidente può essere calcolato come

$$\vec{H}_i(y,z) = \frac{1}{\eta_0}\vec{i}_K \times \vec{E}_i(y,z) \qquad \vec{i}_K = \cos\theta_i\,\vec{i}_y - \sin\theta_i\,\vec{i}_z$$

$$= \frac{1}{\eta_0}\left[\cos\theta_i\,\vec{i}_y - \sin\theta_i\,\vec{i}_z\right]\times\vec{i}_x\,E_0\,e^{-j\beta_1(y\cos\theta_i - z\sin\theta_i)} =$$

$$= -\frac{E_0}{\eta_0}\left[\cos\theta_i\,\vec{i}_z + \sin\theta_i\,\vec{i}_y\right]e^{-j\beta_1(\cdots\cdots)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{i}_y\times\vec{i}_x = -\vec{i}_z\\ -\vec{i}_z\times\vec{i}_x = -\vec{i}_y\end{array}}$$

$$= -(45{,}7\,\vec{i}_z + 73{,}1\,\vec{i}_y)\,e^{-j20\pi(0{,}53y - 0.85z)} \quad [mA/m]$$

Campo trasmesso ad un angolo dato dalla legge di snell

$$K_1\sin\theta_i = K_2\sin\theta_t \qquad \sin\theta_t = \frac{K_1}{K_2}\sin\theta_i = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_r}} =$$

$$K_i = \omega\sqrt{\mu_i\varepsilon_i} \qquad \Rightarrow \theta_t = 32°$$

Onda polarizzata TE (campo elettrico $\perp$)

$$\Gamma_{TE} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)_{TE} \qquad Z_{i,TE} = \frac{\eta_i}{\cos\theta_i}$$

$$Z_{1,TE} = \frac{\eta_0}{\cos 58°} = 711.4\ [\Omega]$$

$$Z_{2TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cos 32°} = 277.8\ [\Omega]$$

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_t} = -0{,}438$$

$$\vec{E}_r(y,z) = \vec{i}_x\,\Gamma_{TE}\,E_0\,e^{j\beta_1(y\cos\theta_r + z\sin\theta_r)} \qquad \vec{i}_{Kr} = -\hat{y}\cos\theta_r - \hat{z}\sin\theta_r$$

$$= -\vec{i}_x\,14.2\,e^{j20\pi(0{,}53y + 0{,}85z)} \quad [V/m]$$

Campo magnetico riflesso

$$-\vec{i}_y \times \vec{i}_x = \vec{i}_z$$
$$-\vec{i}_z \times \vec{i}_x = -\vec{i}_y$$

$$\vec{H}_r(y,z) = \frac{1}{\eta_0}\, \vec{i}_{kr} \times \vec{E}_r(y,z)$$

$$= \frac{1}{\eta_0}\, \Gamma_{TE} E_0 \left[+\vec{i}_z \cos\theta_r - \vec{i}_y \sin\theta_r \right] e^{j20\pi(0,53y+0,48z)}$$

$$= -37,8 \left[0,53\,\vec{i}_z - 0,48\,\vec{i}_y \right] e^{j20\pi(0,53y+0,48z)}$$

c) Densità di potenza media <u>onda riflessa</u>

$$S_{p,r} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_r \times \vec{H}_r^* \right\} = \frac{1}{2} \frac{(\Gamma_{TE} E_0)^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \frac{(14,2)^2}{120\pi} = 0,269 \ [W/m^2]$$

<u>Onda trasmessa</u>

$$T_{TE} = \left(\frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)_{TE} = 0,562$$

$$S_{p,t} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \right\} = \frac{1}{2} \frac{(T_{TE} E_0)^2}{\eta_{02}} = \frac{1}{2} \frac{(T_{TE} E_0)^2}{\eta_0} \sqrt{\varepsilon_r}$$

$$= 0,707 \ [W/m^2]$$

La densità di potenza dell'onda trasmessa può essere calcolata anche imponendo la conservazione del flusso di potenza $\perp$ all'interfaccia

$$S_{p,i} \cos\theta_i = S_{p,r} \cos\theta_i + S_{p,t} \cos\theta_t$$

$$1,4 \cos 58^\circ = 0,269 \cos 58^\circ + S_{p,t} \cos\theta_t$$

$$S_{p,t} = \frac{(S_{p,i} - S_{p,r}) \cos\theta_i}{\cos\theta_t} = 1,13 \frac{0,53}{0.848} \simeq 0,707 \ [W/m^2]$$

ESERCIZIO (INCIDENZA OBLIQUA ONDA POLARIZZATA TM)

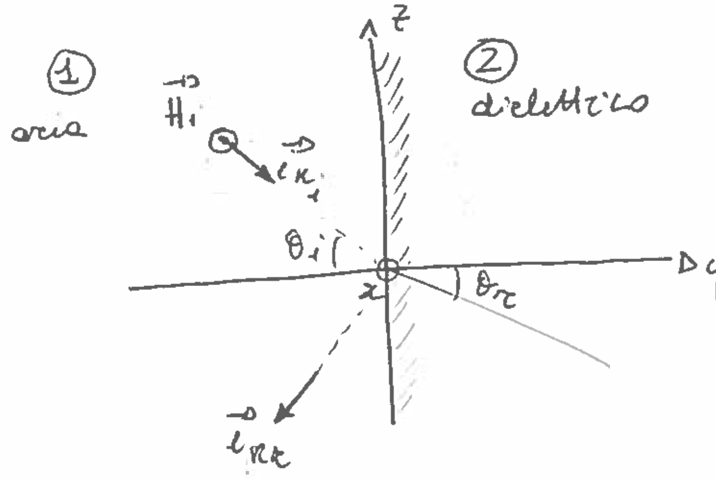
Un'onda piana ~~parallela~~ uniforme incide su un'interfaccia aria-dielettrico con un angolo pari a $\theta_i = 58°$

L'onda ha una polarizzazione TM (campo $E_{\parallel}$ e $H_{\perp}$) con campo magnetico dato da

$$\vec{H}_i(y,z) = \vec{i}_x H_0 e^{-j\beta_i(\cos\theta_i\, y - \sin\theta_i\, z)}$$

densità di potenza media $S_{p,i} = 1{,}4\ \mathrm{W/m^2}$, frequenza $f = 3\,\mathrm{GHz}$

Calcolare H_0; β_i; $\vec{E}_i(x,y)$; $\vec{E}_r(x,y)$; $\vec{H}_r(x,y)$, $\vec{E}_t(x,y)$, $\vec{H}_t(x,y)$



$\sigma = 0$

$\varepsilon_r = 2{,}56$

$\mu_r = 1$

$$\vec{i}_{k_i} = \cos\theta_i\,\vec{i}_y - \sin\theta_i\,\vec{i}_z$$

1) Il campo magnetico H_0 si può calcolare dalla densità media di potenza portata dall'onda incidente

Mezzo ideale $(\eta_1 = \eta_0) \Rightarrow S_{p_i} \in \mathbb{R}$

$$S_{p,i} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\eta_0 H_0^2 \qquad H_0 = \sqrt{\frac{2 S_p}{\eta_0}}$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{120\pi}} \qquad \Rightarrow H_0 = 0{,}0862\,[\mathrm{A/m}]$$

2) Calcolo di β_i In un mezzo ideale $\beta_1 = k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$

in particolare in aria $\beta_1 = \dfrac{\omega}{v_0} = \dfrac{2\pi f}{c} = \dfrac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9\,[\mathrm{rad/s}]}{3\cdot 10^8\,[\mathrm{m/s}]} = 20\pi\,[\mathrm{rad/m}]$

Quindi si ottiene $\vec{H}_i(y,z) = \vec{i}_x\, 86{,}2\, e^{-j20\pi(0{,}53\,\vec{y} - 0{,}848\,\vec{i}_z)}$

3) Calcolo di $E_i(y,z)$

$$-\vec{i}_y \times \vec{i}_x = \vec{i}_z$$
$$+\vec{i}_z \times \vec{i}_x = +\vec{i}_y$$

$$\vec{E}_i(y,z) = -\vec{i}_{K_i} \times \vec{H}_i(y,z)\,\eta_1 =$$

$$= -(\cos\theta_i\,\vec{i}_y - \sin\theta_i\,\vec{i}_z) \times \eta_0 H_0 e^{-j\beta_i(\cos\theta_i y - \sin\theta_i z)}\,\vec{i}_x =$$

$$= (\sin\theta_i\,\vec{i}_y + \cos\theta_i\,\vec{i}_z)\,\eta_0 H_0 e^{-j\beta_i(\cos\theta_i y - \sin\theta_i z)}$$

$$= (\sin\theta_i\,\vec{i}_y + \cos\theta_i\,\vec{i}_z)\underbrace{37.5}_{E_0} e^{-j20\pi(0{,}53y - 0{,}848z)} \quad [V/m]$$

4) Per calcolare il campo riflesso, iniziamo a determinare l'angolo di Brewster per il quale non si ha riflessione

Condizione da imporre $\boxed{Z_{2,TM} = Z_{1,TM}}$ dove $\boxed{Z_{i,TM} = \eta_i \cos\theta_i}$

$$\begin{cases} \eta_0 \cos\theta_B = \eta_2 \cos\theta_t \\ K_1 \sin\theta_B = K_2 \sin\theta_t \end{cases}$$

dove θ_t è legato a θ_i dalla legge di Snell

$$K_i = \omega\sqrt{\mu_i \varepsilon_i} \qquad \eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

dalla seconda relazione $\sin^2\theta_t = \frac{K_1^2}{K_2^2}\sin^2\theta_B = \frac{\sin^2\theta_B}{\varepsilon_r^2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow \cos^2\theta_B = \frac{1}{\varepsilon_r}\cos^2\theta_t \\ \sin\theta_B = \sqrt{\varepsilon_r}\sin\theta_t \Rightarrow \sin^2\theta_B = \varepsilon_r \sin^2\theta_t \end{cases}$$

Dalla prima $1 - \sin^2\theta_B = \frac{1}{\varepsilon_r}(1 - \sin^2\theta_t) = \frac{1}{\varepsilon_r} - \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\sin^2\theta_B}{\varepsilon_r}$

Moltiplicando per ε_r^2 $\quad \varepsilon_r^2 - \varepsilon_r^2\sin^2\theta_B = \varepsilon_r - \sin^2\theta_B$

$$\sin^2\theta_B = \frac{\varepsilon_r^2 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r^2 - 1} = \frac{\varepsilon_r(\varepsilon_r - 1)}{(\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r - 1)} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}$$

$$\Rightarrow \theta_B = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}} = 58°$$

L'angolo di incidenza coincide con l'angolo di Brewster

Non c'è riflessione $\quad \vec{E}_r(y,z) = 0 \quad \vec{H}_r(y,z) = 0$

5) Il campo trasmesso si può calcolare applicando il principio della conservazione della potenza

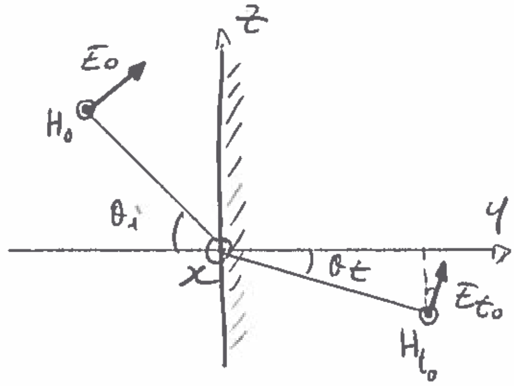
$$S_{p,i} \cos\theta_i = S_{p,t} \cos\theta_t + \underbrace{S_{p,t} \cos\theta_r}_{=0}$$

$$\frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{\eta_1} \cos\theta_i = \frac{1}{2} \frac{|E_{t_0}|^2}{\eta_2} \cos\theta_t$$

Dalla legge di Snell si ricava θ_t $\quad K_1 \sin\theta_i = K_2 \sin\theta_t$

$$\theta_t = a\sin^{-1}\left[\frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right] = 32^\circ$$

$$|E_{t_0}| = \sqrt{\frac{E_0^2 \eta_2}{\eta_1} \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}} = E_0 \sqrt[4]{1/\varepsilon_r} \sqrt{\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}} = 20.3 \ \mathrm{V/m} \quad (*) \Rightarrow$$



$$\vec{E}_t(y,z) = |E_{t_0}|(\cos\theta_t \vec{i}_z + \sin\theta_t \vec{i}_y) \cdot e^{-j\beta_2(\cos\theta_t y - \sin\theta_t z)}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \beta_1 \sqrt{\varepsilon_r} = $$
$$= 20\pi \cdot \sqrt{2,56} = 32\pi$$

$$\vec{E}_t(y,z) = 20.3\left[0{,}848 \vec{i}_z + 0{,}53 \vec{i}_y\right] e^{-j32\pi(0{,}848y - 0{,}53z)} \quad [\mathrm{V/m}]$$

Campo magnetico $\vec{H}_t(y,z) = \frac{1}{\eta_2} \vec{i}_{K_t} \times \vec{E}_t(y,z)$

$\vec{i}_{K_t} = \cos\theta_t \vec{i}_y - \sin\theta_t \vec{i}_z$

$$\vec{H}_t(y,z) = \vec{i}_x \frac{|E_{t_0}|}{\eta_2} e^{-j32\pi(0{,}848y - 0{,}53z)}$$

.. ma sappiamo già che è ⊥ al piano yz

$$= \vec{i}_x \, 86{,}2 \, e^{-j32\pi(0{,}848y - 0{,}53z)} \quad [\mathrm{mA/m}]$$

(*) oppure si può calcolare applicando la conservazione del campo elettrico tangente all'interfaccia

$$E_0 \cos\theta_i = E_{t_0} \cos\theta_t$$ (.... non c'è la componente riflessa)

$$E_{t_0} = E_0 \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \underbrace{32{,}5}_{V/m} \cdot \frac{\cos 58^\circ}{\cos 32^\circ} = 20.3\ [V/m]$$

ESERCIZIO (INCIDENZA OBLIQUA SU CONDUTTORE PERFETTO)

Un'onda piana uniforme con densità media di potenza $10\ W/m^2$ e frequenza $f = 200\ MHz$ si propaga in un mezzo senza perdite con un campo elettrico dato da

$$\vec{E}_i(x,y) = (\vec{i}_x - \vec{i}_y)\frac{E_0}{\sqrt{2}}\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)} + \vec{i}_z\, j\, E_0\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$$

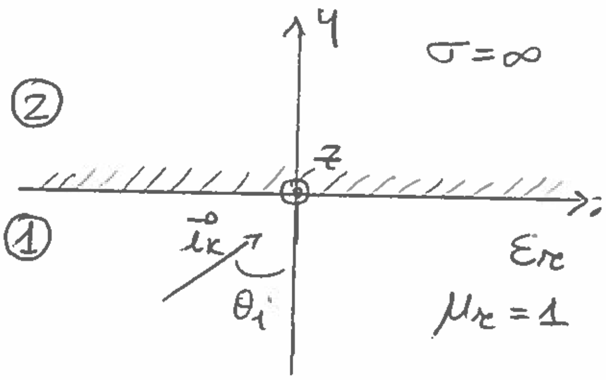
e incide su una superficie conduttrice posizionata nel piano $y=0$. Trovare

a) angolo di incidenza θ_i e la costante dielettrica ε_r del mezzo

b) E_0

c) $\vec{E}_r(x,y)$ dell'onda riflessa

d) Polarizzazione dell'onda



a)

Dalla funzione d'onda del campo si ricava che

$$\vec{\beta}\cdot\vec{r} = \beta_x x + \beta_y y + \beta_z z = \sqrt{2}\pi\,(x+y)$$

quindi
$$\begin{cases} \beta_x = \beta \sin\theta_i = \sqrt{2}\pi \\ \beta_y = \beta\cos\theta_i = \sqrt{2}\pi \\ \beta_z = 0 \end{cases}$$

Facendo il rapporto delle prime 2 componenti si trova

$$\frac{\beta_x}{\beta_y} = \tan\theta_i = 1 \implies \theta_i = 45^\circ$$

da cui
$$\beta = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}/2} = 2\pi$$

In un mezzo senza perdite

$$\beta = k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{\varepsilon_r}$$

quindi $\varepsilon_r = \left(\frac{\beta v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 2\cdot 10^8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$

b) In un mezzo senza perdite il vettore di Poynting è reale

$$S_p = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{\eta_1} \qquad \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$|E|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$$

$$S_p = \frac{1}{2}\frac{|E_x|^2}{\eta_1} + \frac{1}{2}\frac{|E_y|^2}{\eta_1} + \frac{1}{2}\frac{|E_z|^2}{\eta_1} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{2\eta_1} + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{2\eta_1} + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_1}$$

dove $|E_x| = |E_y| = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ $\qquad = \frac{E_0^2}{\eta_1}$

$|E_z| = E_0$

da cui $E_0 = (S_p\eta_1)^{1/2} = \left(\frac{S_p\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right)^{1/2} \simeq 50,1$ [V/m]

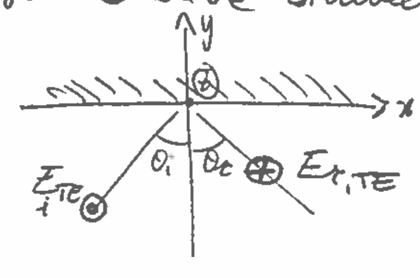
c) L'onda incidente si può scomporre in una componente TE ($\perp$) e una componente TM ($\parallel$)

$$\vec{E}_{i,TE}(x,y) = \vec{i}_z\, j\, E_0\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$$

$$\vec{E}_{i,TM}(x,y) = (\vec{i}_x - \vec{i}_y)\frac{E_0}{\sqrt{2}}\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$$

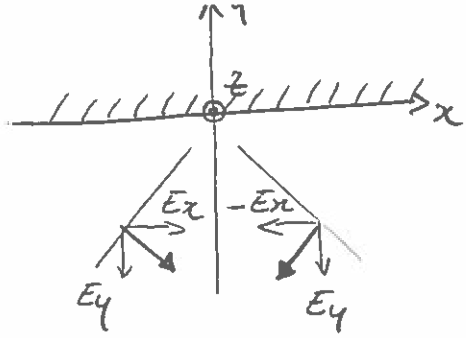
in $y=0$ il campo elettrico tangente all'interfaccia deve annullarsi

$$\vec{E}_{r,TE}(x,y) = -\vec{i}_z\, j\, E_0\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$$

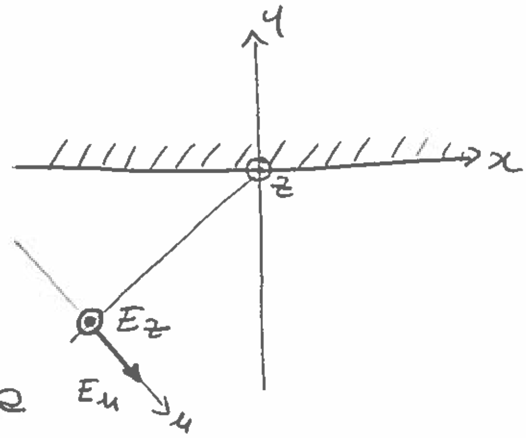


$$\vec{i}_{k,r} = \vec{i}_x\sin\theta_r - \vec{i}_y\cos\theta_r$$

$$\vec{E}_{r,TM}(x,y) = (-\vec{i}_x - \vec{i}_y)\frac{E_0}{\sqrt{2}}\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x-y)}$$



d) Polarizzazione dell'onda incidente



Conviene considerare due direzioni ortogonali: $\vec{i}_z$

$$\vec{i}_u = (\vec{i}_x - \vec{i}_y)/\sqrt{2}$$

che individuano il piano trasverso dell'onda

Quindi $\vec{E}(x,y) = \left[\vec{i}_u\, E_0 + \vec{i}_z\, j\, E_0\right] e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$

$$= \left[\vec{i}_u + j\vec{i}_z\right] E_0\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)}$$

I 2 campi sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$ e hanno stessa ampiezza E_0

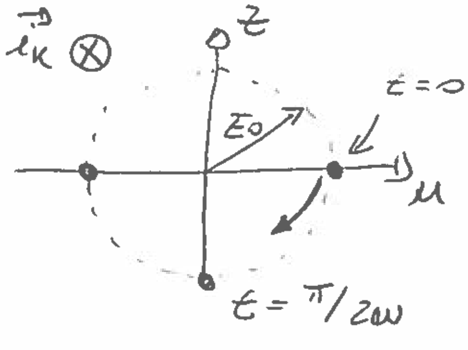
$\Rightarrow$ polarizzazione circolare

$$\vec{\mathcal{E}}(x,y,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(x,y)\, e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\left[\vec{i}_u + j\vec{i}_z\right] E_0\, e^{-j\sqrt{2}\pi(x+y)} e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \vec{i}_u\, E_0 \cos[\omega t - \overset{\sqrt{2}\pi}{\beta}(x+y)] - \vec{i}_z\, E_0 \sin[\omega t - \overset{\sqrt{2}\pi}{\beta}(x+y)]$$

In $x = y = 0$ $\quad \vec{\mathcal{E}}(0,0,t) = \vec{i}_u\, E_0\cos(\omega t) - \vec{i}_z\, E_0 \sin(\omega t)$



$t = 0 \longrightarrow \vec{i}_u\, E_0$

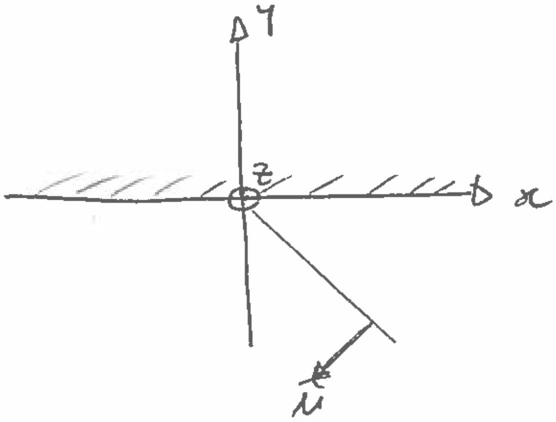
$t = \frac{\pi}{2\omega} \longrightarrow -\vec{i}_z\, E_0$

$t = \frac{\pi}{\omega} \longrightarrow -\vec{i}_u\, E_0$

Si osserva in direzione $\vec{i}_k$ entrante

CIRCOLARE DESTRA

e) Polarizzazione onda riflessa



Conviene considerare le direzioni ortogonali

$\hat{i}_z$

$\vec{i}_v = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}_x + \vec{i}_y)$

che individuano il piano trasverso dell'onda

$$\vec{E}_r(x,y) = \vec{i}_v E_0 e^{-j\sqrt{2}\pi(x-y)} - \vec{i}_z j E_0 e^{-j\sqrt{2}\pi(x-y)}$$

$$= (\vec{i}_v - j\vec{i}_z) E_0 e^{-j\sqrt{2}(x-y)}$$

I due campi sono sfasati di $-\frac{\pi}{2}$ e hanno stessa ampiezza

$\Rightarrow$ polarizzazione circolare

$$\vec{e}_r(x,y,t) = Re\left\{ \vec{E}_r(x,y) e^{j\omega t} \right\} =$$

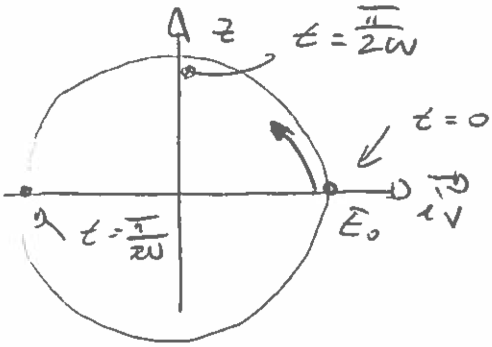
$$= Re\left\{ (\vec{i}_v - j\vec{i}_z) E_0 e^{-j\sqrt{2}(x-y)} e^{j\omega t} \right\}$$

$$= \vec{i}_v E_0 \cos(\omega t - \sqrt{2}\pi(x-y)] + \hat{i}_z E_0 \sin[\omega t - \sqrt{2}\pi(x-y)]$$

$$\Rightarrow \vec{i}_v E_0 \cos[\omega t - \sqrt{2}\pi(x-y)] + \hat{i}_z E_0 \sin[\omega t - \sqrt{2}\pi(x,y)]$$

Mettendoci in un punto arbitrario

$x = y = 0 \quad \vec{e}_r(0,0,t) = \vec{i}_v E_0 [\cos(\omega t)] + \hat{i}_z E_0 \sin(\omega t)$



$t = 0 \rightarrow \vec{i}_v E_0$

$t = \frac{\pi}{2\omega} \rightarrow \vec{i}_z E_0$

$t = \frac{\pi}{\omega} \rightarrow -\vec{i}_v E_0$

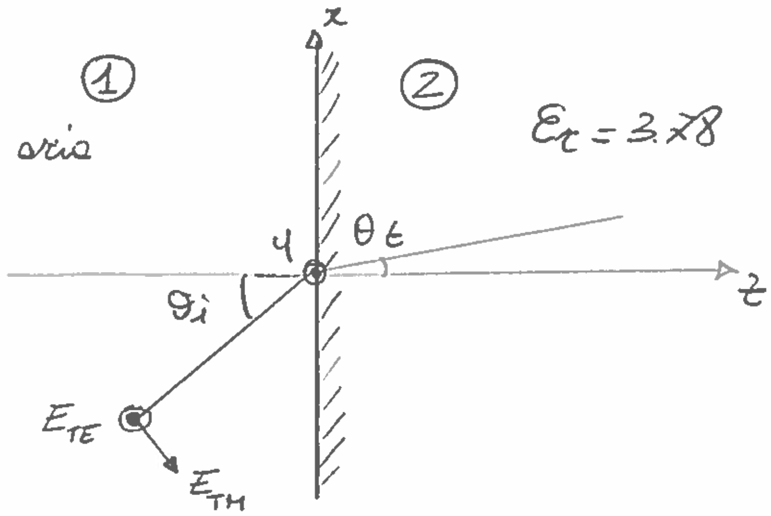
Devo guardare in direzione $\vec{i}_{k_i}$ entrante

CIRCOLARE SINISTRA

ESERCIZIO (INCIDENZA OBLIQUA SU DIELETTRICO, POL. CIRCOLARE)

Un'onda piana polarizzata circolarmente incide su un dielettrico ($\varepsilon_r = 3,78$) con un angolo $\theta_i = 60°$.
La densità media di potenza dell'onda è $S_i = 1\,mW/m^2$

Calcolare le ampiezze dei campi elettrici trasmessi.



$\theta_i = 60°$

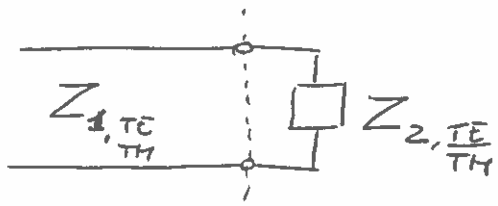
Calcoliamo l'angolo di trasmissione θ_t

$$K_1 \sin\theta_i = K_2 \sin\theta_t \qquad \text{in un mezzo ideale } K = \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r_1}}\sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon_{r_2}}\sin\theta_t \qquad \theta_t = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}}\sin\theta_i\right) \cong 26,5°$$

Nel caso di polarizzazione circolare bisogna studiare il problema scomponendolo nelle 2 polarizzazioni (TE, TM)

Possiamo usare per ogni polarizzazione l'equivalente a linee di trasmissione



modo TM
$$Z_{1,TM} = \eta_1\cos\theta_i = \frac{\eta_0}{1}\cos 60° = 188,5\ [\Omega]$$

$$Z_{2,TM} = \eta_2\cos\theta_t = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}\cos(26,5°) = 173,5\ [\Omega]$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{E_r}{E_i}\Big|_{TM} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\Big|_{TM} = \frac{173.5 - 188.5}{173.5 + 188.5} = -0{,}04$$

coefficiente di trasmissione $T_{TM} \cancel{=} 1 + \Gamma_{TM} = 0{,}96$

attenzione!
$$\frac{E_t}{E_i}\Big|_{TM} \neq 1 + \Gamma_{TM}$$

modo TE $\quad Z_{1,TE} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_i} = \frac{\eta_0}{\cos 60°} = 754 \; [\Omega]$

$$Z_{2,TE} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_t} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}\,\cos(26{,}5°)} = 217 \; [\Omega]$$

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_r}{E_i}\Big|_{TE} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\Big|_{TE} = \frac{217 - 754}{217 + 754} = -0.553$$

$$T_{TE} = 1 + \Gamma_{TE} = 0.447$$

Siccome l'onda è polarizzata circolarmente, le ampiezze dei campi TE e TM sono uguali e portano ciascuno metà della potenza totale $|E_{i,TE}| = |E_{i,TM}|$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{|E_{i,TE}|^2}{\eta_0} + \frac{1}{2}\frac{|E_{i,TM}|^2}{\eta_0} = S_i = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{|E_i|^2}{\eta_0}$$

$$|E_i|_{TE} = |E_i|_{TM} = \sqrt{\eta_0 S_i} = \sqrt{\underset{[\Omega]}{120\pi} \cdot \underset{[W/m^2]}{10^{-3}}} = 0{,}614 \; [V/m]$$

Campi trasmessi:

modo TE $\quad E_{t,TE} = E_{i,TE}\, T_{TE} = 0{,}275 \; [V/m]$

Notare che questo equivale alla conservazione della componente di campo elettrico // all'interfaccia.

infatti

$$E_{t,TE} = E_{i,TE} + E_{r,TE}$$ (polarizzazione TE $\Rightarrow E \parallel$ interfaccia)

$$= E_{i,TE} + \Gamma_{TE} E_{i,TE}$$

$$= E_{i,TE}(1+\Gamma_{TE}) = E_{i,TE}\, T_{TE}$$

<u>modo TM</u>

<u>Attenzione</u> onde per la polarizzazione TM deve essere garantita la conservazione della componente di campo elettrico tangente all'interfaccia

$$E_{t,TM} \cos\theta_t = E_{i,TM} \cos\theta_i + E_{r,TM} \cos\theta_i$$

$$= E_{i_{TM}} \cos\theta_i + E_{i_{TM}} \Gamma_{TM} \cos\theta_i$$

$$= E_{i_{TM}} \cos\theta_i (1+\Gamma_{TM})$$

$$= \cancel{E_{i_{TM}} \cos\theta_i T_{TM}}$$

$$T_{TM} = (1+\Gamma_{TM})\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \frac{E_{t,TM}}{E_{i,TM}}$$

$$\Longrightarrow E_{t,TM} = E_{i_{TM}} \overset{(1+\Gamma_{TM})}{\cancel{T_{TM}}} \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \underbrace{0,614}_{V/m} \cdot (0,96)\frac{\cos 60°}{\cos 26,5°} = 0,33 \ [V/m]$$

1) $E_{t,TE} \neq E_{t,TM}$ l'onda non è più polarizzata esclusivamente

2) $S_{t,TE} \neq S_{t,TM}$

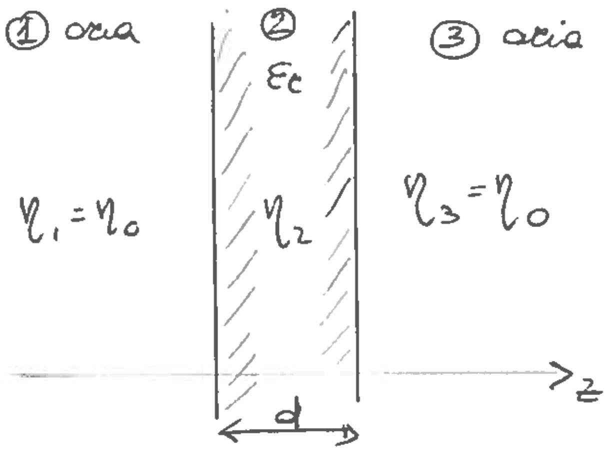
ESERCIZIO (MULTISTRATO, PROGETTO DI UN RADOME)

Un radar dome (radome) e' uno strato protettivo dielettrico per antenne a microonde.

Un materiale comune per radome dielettrici è la fibra di vetro (vetroresina). In banda L (1-2 GHz) la fibra di vetro ha una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4{,}6$.

a) Assumendo una struttura planare, determinare il minimo spessore del radome per non avere riflessioni al centro della banda L

b) Usando lo spessore trovato in a), trovare la percentuale di potenza trasmessa agli estremi della banda L (1 e 2 GHz)



$\varepsilon_r = 4{,}6$

$\mu_r = 1$

Siamo nel caso in cui i 2 materiali ① e ③ sono uguali.

La condizione da imporre per non avere riflessione è

$$d = m\frac{\lambda}{2}$$

Lunghezza d'onda nel mezzo 2 alla frequenza centrale $f_c = 1{,}5\ GHz$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{v_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8\ [m/s]}{1.5\cdot 10^9 [s^{-1}]\sqrt{4.6}} = 9.33\ [cm]$$

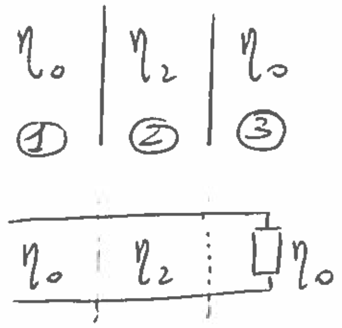
Minimo spessore $d = \frac{\lambda_2}{2} = 4{,}66\ [cm]$

b) Consideriamo la frequenza minima $f_{min} = 1$ GHz

$$\lambda_{2,min} = \frac{\lambda_{0,min}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{v_0}{f_{min}\sqrt{\varepsilon_r}} = 14 \text{ cm}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r} = 44.9 \text{ [rad/m]}$$

Per calcolare la trasmissione di un multistrato si parte dall'ultimo strato (carico) e si trasforma l'impedenza propagando all'indietro in modo iterativo



$$\eta_3 = \eta_1 = \eta_0 = 120\pi \ [\Omega]$$

$$\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_r} = 175,77 \ [\Omega]$$

Coefficiente di riflessione alla sezione 2,3

$$\Gamma_{2,3} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = \frac{\eta_0 - \eta_2}{\eta_0 + \eta_2} = 0,364$$

Calcolo del coefficiente di riflessione alla sezione 1,2

$$\Gamma_{2,3}(d) = \Gamma_{2,3}\, e^{-j2\beta d} = 0,364\, e^{-j\,2\cdot 44.9\cdot 0,0466} = -0,183 + j0,315 = 0,364\, e^{j120°}$$

L'impedenza di carico vista alla sezione 1

$$Z_{L,1} = Z_2 \frac{1 + \Gamma_{2,3}(d)}{1 - \Gamma_{2,3}(d)} = 101,8 + j73,9 \ [\Omega] = 125\, e^{j36°}$$

Coefficiente di riflessione

$$\Gamma_{1,2} = \frac{Z_{L,1} - Z_1}{Z_{L,1} + Z_1} = -0,538 + j0,238 = 0,588\, e^{j156°}$$

$$\left.\frac{S_t}{S_i}\right|_{f_{min}} = 1 - |\Gamma_{1,2}|^2 = 65{,}4\%$$

c) Alla frequenza massima $f_{max} = 2\,GHz$

$$\lambda_{2,max} = \frac{v_0}{f_{max}\sqrt{\varepsilon_t}} \cong 7\,cm$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_t} = 89.8 \quad [rad/m]$$

$$\Gamma_{2,3} = 0{,}364$$

$$\Gamma_{2,3}(d) \doteq \Gamma_{2,3}\, e^{-j2\beta d} = 0{,}364\, e^{-j2\cdot 89{,}8\cdot 0{,}0466} = -0{,}182 - j0{,}315 = 0{,}364\, e^{-j120°}$$

$$Z_{L,1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_{2,3}(d)}{1-\Gamma_{2,3}(d)} = 101{,}8 - j74\ [\Omega] = 126\, e^{-j36}\ [\Omega]$$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{Z_{L1} - Z_1}{Z_{L,1} + Z_1} = -0{,}538 - j0{,}238 = 0{,}588\, e^{-j156°}$$

Agli estremi della banda il coefficiente di riflessione ha lo stesso modulo, ma fase di segno opposto

$$\left.\frac{S_t}{S_i}\right|_{f_{max}} = 1 - |\Gamma_{1,2}|^2 = 65{,}4\%$$

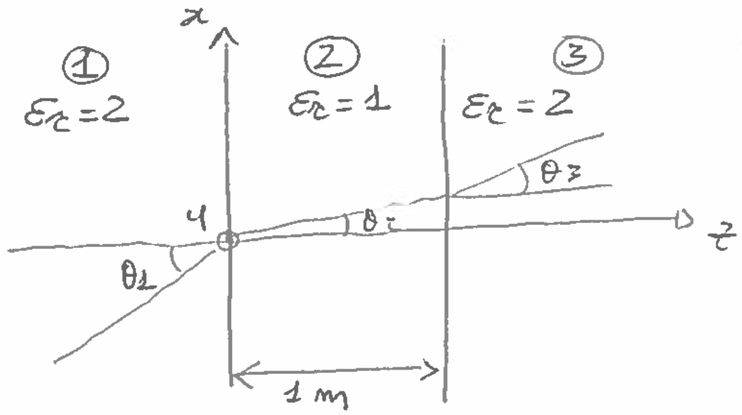
ESERCIZIO (MULTISTRATO, INCIDENZA OBLIQUA TE)

Data l'onda piana uniforme incidente sulla struttura in figura e avente campo elettrico

$$\vec{E}_1(x,z) = \hat{y}\, E_0\, e^{-j(x+\sqrt{3}z)}$$

si calcoli:

1) frequenza e angolo di incidenza θ_1
2) angoli in tutti i mezzi
3) densità di potenza (%) trasmessa nel mezzo ③



$\mu_{r_1} = \mu_{r_2} = \mu_{r_3} = 1$

Campo elettrico diretto come $\hat{y}$

$\Rightarrow$ polarizzazione <u>TE</u>

1) $\vec{\beta} \cdot \vec{r} = \beta_x x + \underbrace{\beta_y y}_{=0} + \beta_z z = \beta_x x + \beta_z z = x + \sqrt{3} z$

$$\begin{cases} \beta_x = \beta_1 \sin\theta_1 = 1 \\ \beta_z = \beta_1 \cos\theta_1 = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \frac{\beta_x}{\beta_z} = \tan\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ$$

$$\beta_1 = \frac{\beta_x}{\sin\theta_1} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2 \ [\text{rad/m}]$$

In un dielettrico ideale $\quad v = \dfrac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{\omega}{\beta \cancel{\sqrt{\varepsilon_r}}} = \dfrac{2\pi f}{\beta \cancel{\sqrt{\varepsilon_r}}}$

$$\Rightarrow f = \frac{v_0 \beta}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{v_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}\,\sin 30^\circ} = 67.5\ [\text{MHz}]$$

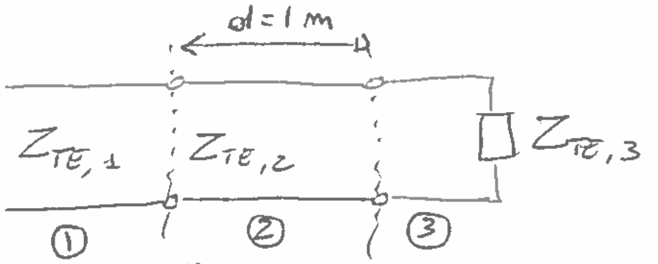
2) Per calcolare gli angoli uso la legge di Snell

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \qquad n_i = \sqrt{\varepsilon_{r_i}}$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right) = \sin^{-1}\left(\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 45^\circ$$

siccome $n_1 = n_3 = \sqrt{2} \qquad \theta_3 = \theta_1 = 30^\circ$

3) Per calcolare riflessione / trasmissione del multistrato, devo conoscere le impedenze d'onda Z_{TE} di tutti i mezzi



$$Z_{TE,m} = \frac{\eta_m}{\cos\theta_m} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,m}}\cos\theta_m}$$

$$Z_{TE,1} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_1} = \frac{120\pi}{\sqrt{2}\cos 30^\circ} = 307.8 \ [\Omega]$$

$$Z_{TE,2} = \frac{\eta_0}{\cos\theta_2} = \frac{120\pi}{\cos 45^\circ} = 533,1 \ [\Omega]$$

$$Z_{TE,3} = Z_{TE,1} = 307.8 \ [\Omega]$$

Partendo dall'ultima interfaccia 2 - 3

$$\Gamma_{TE,23} = \left.\frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}\right|_{TE} = -0,268$$

Riporto il Γ_{23} sulla prima interfaccia

$$\Gamma_{TE,23}(d) = \Gamma_{TE,23}\, e^{-j2\beta_{2z}d}$$

<u>attenzione</u> devo considerare la sola componente del β nella direzione di $\perp$ all'interfaccia

$$\beta_{2,z} = \beta_2 \cos\theta_2 = \beta_1\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2 = 0,997 \ [rad/m]$$

da cui $\Gamma_{TE,23}(d) = -0,268 \cdot e^{-j1.994} = 0.110 + j0.243 = 0,268\, e^{j68,6}$

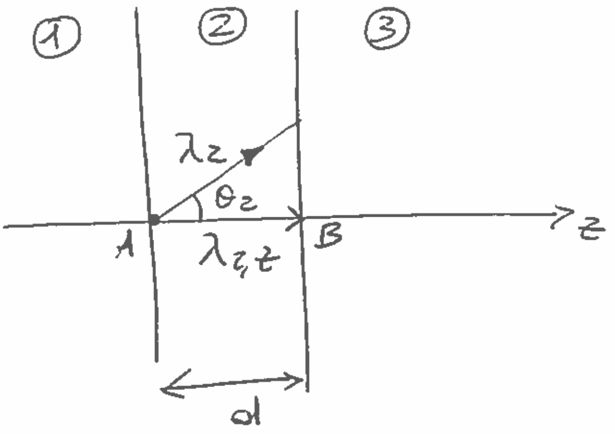
Dal Γ_{23} riportato sulla sezione 1, trovo l'impedenza di carico vista dall'onda TE sulla sezione 1

$$Z_{L,1} = Z_{TE,2}\frac{1+\Gamma_{TE,23}(d)}{1-\Gamma_{TE,23}(d)} = 581 + j306 \ [\Omega]$$

$$\Gamma_{L,1} = \left.\frac{Z_{L1} - Z_1}{Z_{L1} + Z_1}\right|_{TE} = 0,38 + j0,213j = 0,436\, e^{j29^\circ}$$

Potenza (%) trasmessa nel mezzo 3 $\quad \dfrac{P_T}{P_i} = 1 - |\Gamma_{L,1}|^2 = 1 - 0,19 \approx 81\%$

Sfasamento nel mezzo (2)



$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

Nella direzione $\hat{i}_z$ la lunghezza d'onda apparente vale

$$\lambda_{2,z} = \frac{\lambda_2}{\cos\theta_2}$$

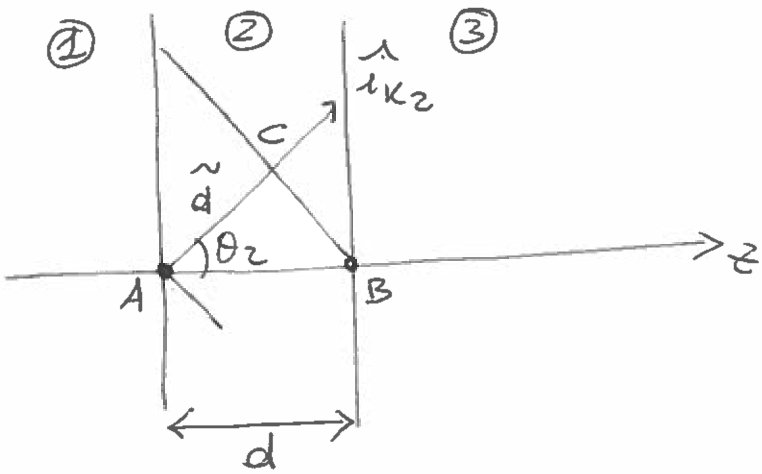
Quindi il β_{2z} vale

$$\beta_{2,z} = \frac{2\pi}{\lambda_{2,z}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}\cos\theta_2 = \beta_2 \cos\theta_2$$

Quindi lo sfasamento accumulato attraverso uno spessore d vale ϕ_{AB}

$$\beta_{2,z}\, d = \beta_2 \cos\theta_2\, d$$

Interpretazione alternativa



Individuo i piani equifase
La distanza tra i piani equifase vale

$$\tilde{d} = d\cos\theta$$

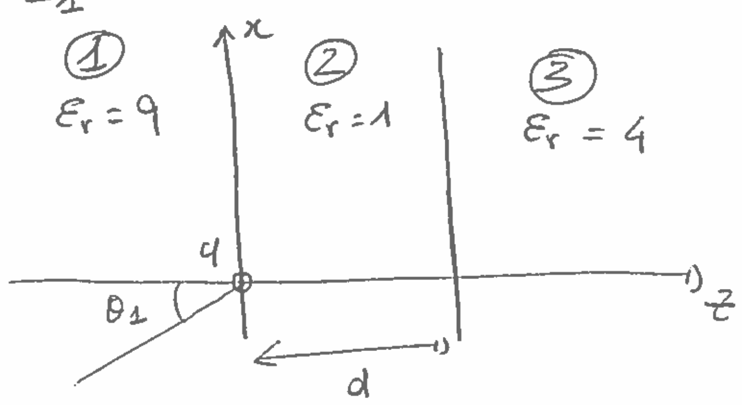
Nella direzione $\hat{i}_{k2}$ l'onda si sfasa con costante di fase β_2

Quindi lo sfasamento $\phi_{AB} = \phi_{AC}$

$$\phi_{AC} = \beta_2\, \tilde{d} = \beta_2 \cos\theta_2\, d$$

ESERCIZIO (MULTISTRATO, INCIDENZA OBLIQUA > ANGOLO CRITICO)

Per il problema in figura calcolare il campo trasmesso in polarizzazione TE, nota l'ampiezza del campo incidente $E_1^+ = 2mV/m$



$\theta_1 = 30°$

$d = 3\,mm$

$f = 2\,GHz$

$\theta_1 = 30°$

$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 0.15\,m$

Per prima cosa conviene calcolare gli angoli in ogni mezzo

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = 3\cdot\frac{1}{2} = 1,5 > 0$

$n_m = \sqrt{\varepsilon_{r,m}}$ L'incidenza avviene ad un angolo maggiore dell'angolo critico

$|\Gamma_{1,2}| = 1 \Rightarrow \frac{P_T}{P_i} = 1 - |\Gamma|^2_{1,2} = 0$ NO! sarebbe così solo se $d \to \infty$ (= senza mezzo 3)

se $\sin\theta_2 > 0$ significa che nel mezzo ② l'onda è evanescente nella direzione $\hat{z}$.

$$\beta_{2,z} = \beta_2 \cos\theta_2 = \beta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(1,5)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{-1,25}$$

$$= \pm j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 1,12$$ considero segno negativo per avere attenuazione in direzione z

$\beta_{2,z} = -j\alpha_{2,z} = -j\,46.9$ $\alpha_{2,z} = 46.9$ [Np/m]

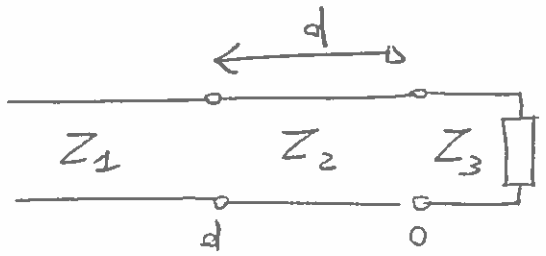
L'onda si propaga nel mezzo 2 come $e^{-\alpha_{2,z} z}$

NOTA $\beta_{2,x} = \beta_2 \sin\theta_2 = \frac{\omega}{v_0} n_2 \sin\theta_2 = \frac{\omega}{v_0} n_2 \sin\theta_1 = \beta_2 \sin\theta_1$ è reale! Trasporto di potenza reale nella direzione $\hat{x}$

Angolo nel mezzo (3)

$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3$ $\qquad \theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_3}\sin\theta_1\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\right)$

$= 48.6°$



$d = -z$

Calcolo delle impedenze d'onda $Z_{1,TE} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}\cos\theta_1} = 145{,}1$ $[\Omega]$

$$Z_{2,TE} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_2} = \frac{\eta_0}{\cos\theta_2} = \frac{120\pi}{-j\,1{,}12} = j\,336{,}6 \; [\Omega]$$

$$Z_{3,TE} = \frac{\eta_3}{\cos\theta_3} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}\,\cos(48.6°)} = 284.5 \; [\Omega]$$

Notare che $Z_{2,TE} \in \mathrm{Im}$ ($\Rightarrow$ componente stazionaria)
E,H sfasati di $\pi/2$

Partiamo dall'ultimo mezzo e calcoliamo il coefficiente di trasmissione/riflessione del multistrato

$$\Gamma_{2,3} = \left.\frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}\right|_{TE} = \frac{284.5 - j\,336.6}{284.5 + j\,336.6} = -0{,}166 - j0.986 =$$

$$= e^{-j\,99.6°} \qquad (\Rightarrow |\Gamma_{2,3}| = 1!)$$

Riportiamo Γ sulla sezione d

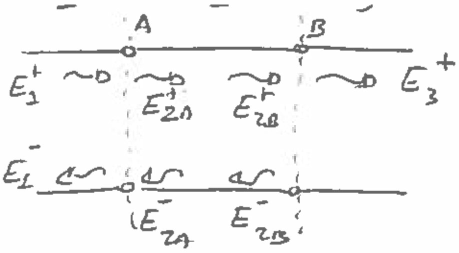
$$\Gamma_{2,3}(d) = \Gamma_{2,3}\, e^{-2\alpha_{z,2} d} = 0{,}754\, e^{-j\,99.6°}$$ non cambia la fase

$$Z_{L,1} = Z_{2,TE}\,\frac{1 + \Gamma_{2,3}(d)}{1 - \Gamma_{2,3}(d)} = 275{,}6 + j\,79.5 [\Omega]$$

Coefficiente di riflessione all'ingresso

$$\Gamma_{TE,12} = \left.\frac{Z_{L,1} - Z_1}{Z_{L,1} + Z_1}\right|_{TE} = 0{,}333 + j0{,}126 = 0{,}356\, e^{j\,20.7°}$$

$$\frac{P_T}{P_i} = 1 - |\Gamma_{TE}|^2 = 87.3\,\%$$



$$\frac{E_{2B}^-}{E_{2B}^+} = \Gamma_{23}$$

$$\frac{E_{2A}^-}{E_{2A}^+} = \Gamma_{23}(d)$$

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} = \Gamma_{TE,12}$$

$$E_1^- + E_1^+ = E_{2A}^- + E_{2A}^+$$

$$\begin{cases} E_1^+(1+\Gamma_{12}) = E_{2A}^+\left(1+\Gamma_{23}(d)\right) \\ E_3^+ = E_{2B}^+ + E_{2B}^- = E_{2B}^+(1+\Gamma_{23}) \end{cases}$$

Continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico

$$E_3^+ = (1+\Gamma_{23})\, E_{2B}^+$$
$$= (1+\Gamma_{23})\, E_{2A}^+ \, e^{-\alpha_{2z} d}$$
$$= (1+\Gamma_{23})\, e^{-\alpha_{2z} d}\, \cancel{E_{2A}} \, E_{2A}^+$$

$$E_3^+ = (1+\Gamma_{23})\, e^{-\alpha_{2z} d} \frac{(1+\Gamma_{12})}{1+\Gamma_{23}(d)} E_1^+ =$$

$$= E_1^+ \frac{1+\Gamma_{23}}{1+\Gamma_{23}(d)} (1+\Gamma_{12})\, e^{-\alpha_{2z} d} =$$

$$= 2\ \text{mV/m}\ \frac{1+e^{-j99.6°}}{1+0{,}754\, e^{-j99.6°}} \left(1+0.356\, e^{j20.7°}\right) 0.869$$

$$= 2{,}6 - 0{,}18j\ [\text{mV/m}] \implies |E_3^+| = 2{,}606\ \text{mV/m} > |E_1^+|$$

è possibile?

$$S_{3,z}^+ = \frac{1}{2}\frac{|E_3^+|^2}{\eta_3}\cos\theta_3 = 12\ \text{mW/m}^2$$

$$S_{1,z}^+ = \frac{1}{2}\frac{|E_1^+|^2}{\eta_1}\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\frac{|E_1^-|^2}{\eta_1}\cos\theta_1$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|E_1^+|^2(1-|\Gamma_e|^2)}{\eta_1}\cos\theta_1 = 12\ \text{mW/m}^2$$

La densità di potenza in direzione z si conserva