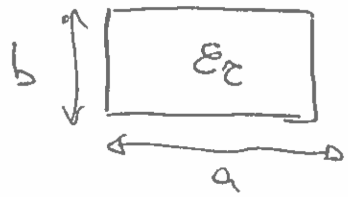
ESERCIZIO (GUIDA D'ONDA RETTANGOLARE)

Si consideri una guida d'onda rettangolare con dimensioni $a = 10$ cm e $b = 7.5$ cm

Trovare il valore della costante dielettrica ε_r del materiale con cui riempire la guida in modo che la minima frequenza utilizzabile sia $f = 1$ GHz.

Trovare la banda di funzionamento monomodale



$a = 10$ cm

$b = 7.5$ cm

Come si accendono i modi di una guida rettangolare?

Ogni modo si accende sopra una frequenza di taglio

$$\omega_{c,mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

NB - TE, TM hanno stessa f_c
- modi TM esistono solo per $m \neq 0$, $n \neq 0$

Per la guida rettangolare il primo modo che si accende (modo dominante) è il TE_{10}

Primo modo superiore
- se $a > 2b \Rightarrow TE_{20}$
- se $a < 2b \Rightarrow TE_{01}$
- se $a = 2b$ TE_{20} e TE_{01} hanno la stessa frequenza di taglio

Calcoliamo le lunghezze d'onda di taglio dei vari modi

$$\lambda_{c,mn} = \frac{v}{f_{c,mn}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}$$

	m	n	
TE_{10}	1	0	$\Rightarrow \lambda_{c,10} = 2a = 20$ cm
TE_{01}	0	1	$\Rightarrow \lambda_{c,01} = 2b = 15$ cm
TE_{20}	2	0	$\Rightarrow \lambda_{c,20} = a = 10$ cm

Se vogliamo che la frequenza minima di funzionamento sia $f_{min} = 1\,GHz$, dobbiamo imporre che il modo TE_{10} si propaghi a f_{min}

$f_{c,10} < f_{min}$ $\Rightarrow$ meglio avere $f_{c,10}$ un po' minore di f_{min} perché al cut-off il modo si propaga male

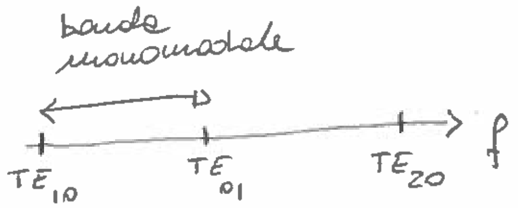
$f_{c,10} = 0.95\ GHz$ $\qquad f_{c,10} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,10}} = 0.95\ GHz$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{\lambda_{c,10}\, f_{c,10}}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{0,2\,m \cdot 0.95 \cdot 10^9\ [s^{-1}]}\right)^2 = 2.5$$

Fissato ε_r, calcoliamo le frequenze di taglio dei modi superiori.

$$f_{c,01} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,01}} = 1.27\ GHz \qquad (\lambda_{c,01} = 15\ cm)$$

$$f_{c,20} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,20}} = 1.9\ GHz \qquad (\lambda_{c,20} = 10\ cm)$$



Banda monomodale

$$B = f_{c,01} - f_{c,10} = (1.27 - 0.95)\ [GHz] = 0.32\ GHz$$

<u>oss</u> Prendendo $f_{c,10} = f_{min} = 1\ GHz$ $\quad (\varepsilon_r = 2,25)$

$$f_{c,01} = 1.33\ GHz$$

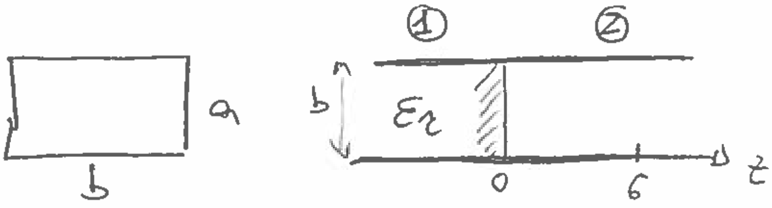
$$B = 0,33\ GHz$$

Con la scelta fatta la banda monomodale è un po' più stretta ($\sim 3\%$), ma $f = 1\,GHz$ è guidata meglio

ESERCIZIO (Guida d'onda sotto frequenza taglio)

Una guida d'onda rettangolare $(a \times b)$ è riempita di dielettrico per $z \leq 0$. Un'onda alla frequenza $f = 1\,GHz$ e intensità di campo al centro $E_0 = 10\,mV/m$ incide sulla discontinuità.
Calcolare il modulo del campo elettrico risultante al centro della guida per $z = 0$ e $z = 6\,cm$.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 30\,cm$$



$a = 10\,cm$
$b = 5\,cm$
$\varepsilon_r = 4$

Calcoliamo le frequenze di taglio dei modi

TE_{10} $\quad \lambda_{c,10} = 2a = 20\,cm$

TE_{01} $\quad \lambda_{c,01} = 2b = 10\,cm$

TE_{20} $\quad \lambda_{c,20} = a = 10\,cm$

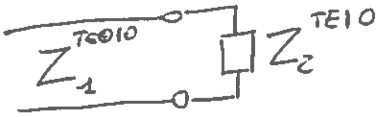
$$f_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_c}$$

①	②
$f_{1,10} = 0.75\,GHz$	$f_{2,10} = 1,5\,GHz$
$\left.\begin{matrix} f_{1,01} \\ f_{1,20} \end{matrix}\right\} = 1,5\,GHz$	

$\Rightarrow$ Dal mezzo ① arriva solo il modo TE_{10}

$\Rightarrow$ Nella seconda guida siamo sotto la frequenza di taglio del modo TE_{10}. Cosa succede?

Modello a linee di trasmissione



$$Z_1^{TE10} = \frac{\eta_1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{120\pi/\sqrt{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.75}{1}\right)^2}} = 285\,[\Omega]$$

$$Z_2^{TE01} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{1.5}{1}\right)^2}} = j\,337\,[\Omega]$$

(positivo per modi TE)

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = 0.167 + j0.986$$
$$= 1\,e^{+j80.4^\circ}$$

$|\Gamma| = 1$
$$E(0) = E^+(0) + E^-(0) = E^+(0)(1+\Gamma) = E_0^+(1 + e^{j80.4^\circ})$$
$$= 10\,(1 + e^{j80.4^\circ}) = 11.667 + j9.86 = 15.27\,e^{j40.2^\circ}$$

$|E(0)| = 15.27\,mV/m$

Il campo nel mezzo 2 si propaga con costante $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{g}}$

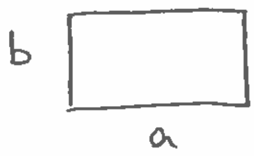
$$\lambda_{g_1^2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{g2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = -j23.41$$

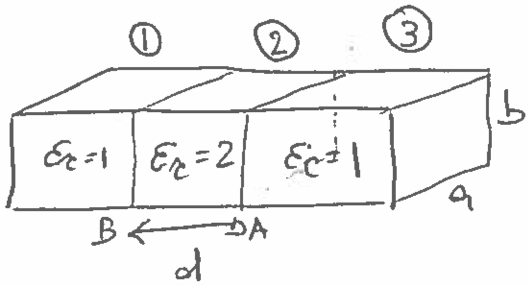
$$\alpha_2 = 23.41\,[Np/m]$$

$$E(z) = E_0 e^{\cdots} \underset{z=6\,cm}{\Rightarrow} 15.27\, e^{\cdots}\, e^{-\cdots} = 3{,}74 \text{ mV/m}$$

ESERCIZIO (MULTISTRATO IN GUIDA D'ONDA)

Per la guida d'onda in figura, calcolare la frazione di potenza riflessa al centro della banda monomodale (= centro banda TE_{10})





$a = 5$ cm
$b = 2.5$ cm
$d = 15$ cm

- Calcoliamo la banda monomodale (se non specificato si intende nella guida di ingresso $\varepsilon_r = 1$)

TE_{10} $\lambda_{c,10} = 2a = 10$ cm (3 GHz)

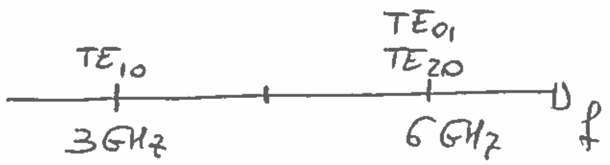
TE_{01} $\lambda_{c,01} = 2b = 5$ cm (6 GHz)

TE_{20} $\lambda_{c,20} = a = 5$ cm (6 GHz)

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{mb^2 + na^2}}$$

Siccome $a = 2b$ $f_{c,01} = f_{c,20}$

$$f_{c,mn} = \frac{v}{\lambda_{c,mn}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,mn}}$$



Quindi $f_0 = 4.5$ GHz centro banda monomodale

- Calcoliamo le impedenze caratteristiche alla frequenza f_0

$$Z_{TE}^{mn} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}}$$

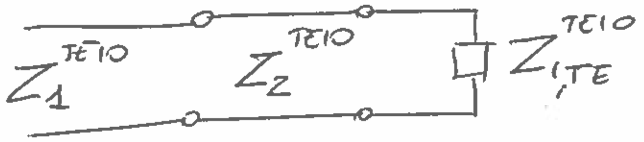
$$Z_1^{TE10} = \frac{\eta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,10}}{f_0}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4.5}\right)^2}} = 505.8 \; [\Omega]$$

Attenzione La frequenza di taglio dipende da ε_r!

Nel mezzo 2 $$f_{c,10}^{(2)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,10}} = \frac{f_{c,10}^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 2.12 \; [GHz]$$

Quindi $Z_2^{TE10} = \dfrac{\eta_2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{c10}}{f_0}\right)^2}} = \dfrac{377}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2.12}{4.5}\right)^2}} = 302.2\ [\Omega]$

Equivalente a linee di trasmissione



Coefficiente di riflessione alla sezione 2,3

$$\Gamma_{2,3}^{TE10} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = 0{,}252$$

Per propagare il Γ_{23} alla sezione 1,2 devo trovare il β_2 del tratto di guida intermedio

$\beta_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_{g,2}}$ dove $\lambda_{g,2} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{c,10}}{f_0}\right)^2}} = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-\left(\dfrac{2.12}{4.5}\right)^2}} = 5{,}34\ [cm]$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 6.66\ cm$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{g,2}} = 117.6\ [rad/m]$$

$$\Gamma_{2,3}(d) = \Gamma_{2,3}\, e^{-j2\beta_2 d} = 0{,}252 \cdot e^{-j2\cdot 117{,}6 \cdot 0.15} = -0.19 + j0.17 = 0{,}252\, e^{j139^\circ}$$

Impedenza di carico vista dal mezzo 1

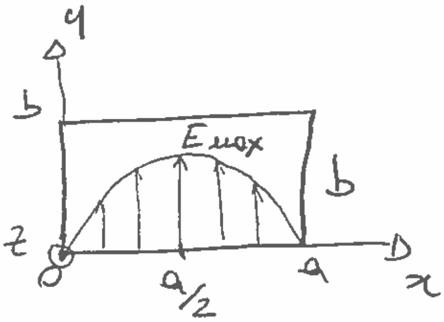
$$Z_{L,1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_{23}(d)}{1-\Gamma_{23}(d)} = 196 + j69\ [\Omega] = 207.7\, e^{j19.4}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{Z_{L,1} - Z_1}{Z_{L,1} + Z_1} = -0{,}425 + j145 = 0.45\, e^{j162^\circ}$$

Potenza riflessa $\dfrac{P_r}{P_i} = |\Gamma|^2 = 20.1\ \%$

ESERCIZIO (Potenza trasportata da una guida d'onda)

Una guida d'onda in aria di dimensioni $a = 3$ cm e $b = 1,5$ cm viene usata sul modo TE_{10} alla frequenza di 7 GHz. Calcolare la potenza massima che può essere trasportata in guida assumendo adattamento completo e un coefficiente di sicurezza 2 (rispetto alla rigidità dielettrica dell'aria 30 KV/cm)



$a = 3$ cm
$b = 1,5$ cm
modo TE_{10}

$R_d = 30$ KV/cm
$= 3 \cdot 10^6$ V/m

Il modo TE_{10} ha il massimo del campo elettrico al centro $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ della parete di lunghezza maggiore

Per non avere scariche attraverso il dielettrico (aria)

$$E_{max} < \frac{R_d}{2} = 1.5 \cdot 10^6 \, [V/m]$$ ⇒ questo limita la max potenza trasportabile

Adattamento completo ⇒ non ho onde riflesse

Come sono fatti i campi trasversi?

$$\vec{E}^{\,+}_{T,10} = \hat{y}\, E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}^{\,+}_{T,10} = -\hat{x}\, \frac{E_0}{Z_{TE10}} \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-j\beta z}$$

Il modo TE_{10} ha solo componente E_y

⇒ il campo magnetico ha sia H_z che H_x

↳ solo queste contribuisce al flusso di potenza in direzione $\hat{z}$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2}\vec{E}_y \times \vec{H}_x^*$$ densità di potenza trasportata dall'onda

<u>Oss</u> La componente H_z è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a E_y

Non c'è flusso di potenza reale nella direzione x

$$P = \int_S \vec{S} \cdot ds = \frac{1}{2} Re \int_S (\vec{E}_y \times \vec{H}_x^*) \cdot d\vec{s} =$$

$$= + \frac{1}{2} \iint_{S\,0\,0}^{b\,a} \frac{|E_0|^2}{Z_{TE10}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx\, dy =$$

$$= \frac{b}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_{TE10}} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \qquad \int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\sin 2x}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{ab}{Z_{TE10}} |E_0|^2$$

$$Z_{TE10} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}} = 538.6\ [\Omega]$$

$$\lambda_{c,TE10} = 2a = 6\ \text{cm}$$

$$f_c = \frac{c}{\lambda_{c,TE10}} = 5\ \text{GHz}$$

$$P_{max} = \frac{1}{4} \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}\ [m^2]}{538.6\ [\Omega]} \underbrace{\left(\frac{3}{2} \cdot 10^6\right)^2}_{E_{max}} \frac{V^2}{m^2} = 470\ \text{KW}$$

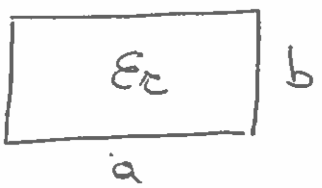
ESERCIZIO (Progetto di una guida d'onda)

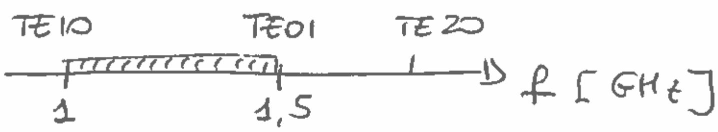
Si dimensioni una guida d'onda rettangolare con le seguenti caratteristiche

1) Capacità di trasmettere in propagazione monomodale un segnale nella banda 1 - 1,5 GHz

2) Dimensione di ogni lato < 10 cm

Calcolare l'ampiezza del campo elettrico e magnetico totale per $x = \frac{a}{3}$ (a lato maggiore) sapendo che nella guida si propaga una potenza di 1 W a frequenza $f = 1,25$ GHz





Il modo fondamentale deve accendersi a 1 GHz

$$\lambda_{c,TE10} = 2a \qquad \text{in aria } f_c = \frac{c}{\lambda_c}$$

supponiamo di lavorare in aria

$$\Rightarrow a = \frac{\lambda_{c,TE10}}{2} \quad \Rightarrow \text{in aria } a = \frac{\lambda_{c,TE10}}{2} = \frac{c}{f_c\, 2} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9 \cdot 2} = 15 \text{ cm}$$

non va bene

Deve riempire la guida di dielettrico

$$f_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_c} \qquad a = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_r}\, f_c} = 10 \text{ cm} = a_{max}$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{2 a_{max} f_c}\right)^2 = 2.25$$

Il modo superiore TE01 deve eccitarsi a 1,5 GHz

$$\lambda_{c,TE01} = 2b \qquad b = \frac{\lambda_{c,TE01}}{2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\, f_c\, 2} = 6.67 \text{ [cm]}$$

La potenza portata dal modo TE10 è data da

$$P = \frac{1}{4}\frac{ab}{Z_{TE10}}|E_0|^2 \qquad E_0 \text{ campo elettrico a centro guida}$$

$$Z_{TE10} = \frac{\eta_0/\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{377/1.5}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.25}\right)^2}} = 419\ [\Omega]$$

$$|E_0| = \left(\frac{4PZ_{TE10}}{ab}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\cdot 1\cdot 419}{0{,}1\cdot 0{,}067}\right)^{1/2} \cong 500\ V/m$$

Noto il campo al centro della guida è possibile ottenere tutte le componenti E_y e H_x e H_z

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \Rightarrow E_y\left(\frac{a}{3}\right) = E_0 \sin\left(\frac{a}{3}\frac{\pi}{a}\right) = \cancel{44}\ 433\ V/m$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE10}} = -\frac{E_0}{Z_{TE10}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \Rightarrow H_x\left(\frac{a}{3}\right) \cong 1\ A/m$$

Per trovare Hz si osservi che

$$\frac{E_y}{H_z} = -\frac{j\omega\mu a}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_z = E_y\, j\frac{\pi}{\omega\mu a}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{a}x\right)} = j\frac{\pi}{\omega\mu a}E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$H_z\left(\frac{a}{3}\right) = j\frac{\pi\cdot 500}{2\pi\cdot 1{,}25\cdot 10^9\mu_0\cdot 0{,}1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}796\ A/m$$

<u>oss</u> Ogni modo ha una "forma diversa" sul piano trasverso

modo TE10 solo componente $E_y(x,y) = E_y(x)$

modo TE01 " $E_x(x,y) = E_x(y)$

Guida circolare

Una guida d'onda circolare (in aria) operante in banda X (8-12 GHz) ha un diametro interno di 2,383 cm. Calcolare

1) frequenze di taglio dei primi 3 modi

2) modi che si possano propagare a 10 GHz e relative lunghezze d'onda

3) banda di monomodalità

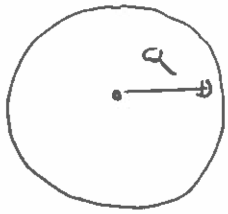
$\chi' = 1.8412$ $\chi = 2,4048$ $\chi' = 3.0542$

$\longrightarrow \chi$

TE11   TM01   TE21

$\chi = Ka \Rightarrow$ argomento funzione di Bessel

modi TE11 $\quad \lambda_{c,TE11} = \dfrac{2\pi a}{\chi'_{11}} = \dfrac{2\pi \cdot 1,1915}{1.8412} = 4.06$ cm



$$f_{c,TE11} = \frac{c}{2\pi a}\chi'_{11} = 7.38\ GHz$$

$$a = \frac{d}{2} = 1,1915\ cm$$

modo TM01 $\quad f_{c,TM01} = \dfrac{c}{2\pi a}\chi_{01} = 9.64\ GHz$

modo TE21 $\quad f_{c,TE21} = \dfrac{c}{2\pi a}\chi'_{21} = 12.2\ GHz$

$\Rightarrow$ Alla frequenza di 10 GHz si propagano solo i modi TE11 e TM01

2) Lunghezze d'onda a $f = 10$ GHz $\Rightarrow \lambda_0 = \dfrac{c}{f} = 3$ cm

$$\lambda_{TE11} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{0,03}{\sqrt{1-\left(\frac{7.38}{10}\right)^2}} = 4,45\ cm$$

$$\lambda_{TM01} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{0.03}{\sqrt{1-\left(\frac{9.64}{10}\right)^2}} = 11.3\ cm$$

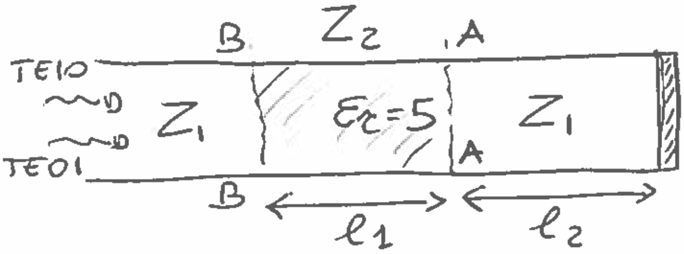
3) Banda monomodale

$$B = f_{c,TM01} - f_{c,TE11} = (9,64 - 7.38) = 2.26\ [GHz]$$

ESERCIZIO

Si consideri una guida d'onda avente $a = 6$ cm, $b = 5$ cm in cui si propagano i modi TE10 e TE01 alla frequenza $f = 4$ GHz. La potenza totale che si propaga in guida è di 10 W, di cui metà associata al modo TE_{10}.

Si determini la potenza assorbita da un carico adattato nel circuito in figura.



$\ell_1 = 5$ cm $\quad a = 6$ cm

$\ell_2 = 5$ cm $\quad b = 5$ cm

Per costruire il modello a linee di trasmissione devo ricavare le impedenze $Z_{i,\,TE10 / TE01}$ e quindi mi servono le frequenze di taglio nei 2 mezzi

oss Il dielettrico abbassa le frequenze di taglio di ogni modo

TE10 $\quad \lambda_{c,10} = 2a = 12$ cm

TE01 $\quad \lambda_{c,01} = 2b = 10$ cm

Frequenze di taglio

$$f_{c,mn} = \frac{v}{\lambda_{c,mn}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_{c,mn}}$$

mezzo ①	mezzo ②	
$f^{(1)}_{c,10} = 2{,}5$ GHz	$f^{(2)}_{c,10} = 1{,}12$ GHz	TE10
$f_{c,01} = 3$ GHz	$f^{(2)}_{c,01} = 1{,}34$ GHz	TE01

Calcolo delle impedenze

modo TE10

mezzo ① $\quad Z_{1,TE10} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f^{(1)}_{c,10}}{f}\right)^2}} = \dfrac{377}{\sqrt{1-\left(\frac{2,5}{4}\right)^2}} = 483\ [\Omega]$

mezzo ② $\quad Z_{2,TE10} = \dfrac{377/\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{1,12}{4}\right)^2}} = 176\ [\Omega]$

modo TE 01

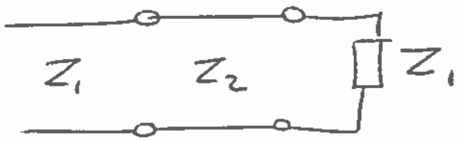
① $\quad Z_{1,TE01} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = 570\ [\Omega]$

② $\quad Z_{2,TE01} = \dfrac{377}{\sqrt{5}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(1.34/4\right)^2}} = 179\ [\Omega]$

Siccome il carico è adattato, ha la stessa impedenza della guida (per ogni modo)

$\Rightarrow$ il tratto ℓ_2 non ha alcuna influenza!

Modello a linee di trasmissione



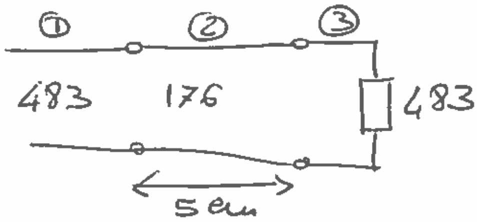
Devo calcolare $\lambda_{g,2}$ per i 2 modi. $\lambda_0 = \frac{c}{f} = 7{,}5$ cm

$$\lambda_{g,2\,TE10} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{1-\left(\frac{f^{(2)}_{c,TE10}}{f}\right)^2}} = \frac{7{,}5/\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{1{,}12}{4}\right)^2}} = 3.49 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g,2\,TE01} = \frac{7{,}5/\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{1{,}34}{4}\right)^2}} = 3.56 \text{ cm}$$

<u>oss</u> Ogni modo si propaga con un β diverso, <u>caratteristico</u> del modo

<u>modo TE10</u>



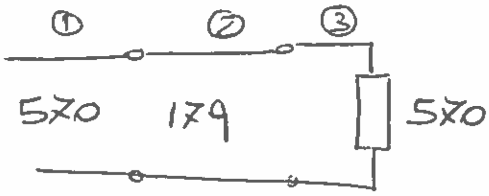
$$\Gamma_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = \frac{483-176}{483+176} = 0{,}466 \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{g,2\,TE10}} = 180.03 \text{ [rad/m]}$$

$$\Gamma_{23}(d) = \Gamma_{23}\, e^{-j2\beta_2 d} = 0{,}466\, e^{j48.5^\circ}$$

$$Z_{L1} = Z_2 \frac{1+\Gamma_{23}(d)}{1-\Gamma_{23}(d)} = 230 + j204.8 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{Z_{L1} - Z_2}{Z_{L1} + Z_2} = 0.439\, e^{+j125^\circ} \qquad P_{ass,TE10} = P_{in,TE10}\left(1-|\Gamma|^2\right) = 5\text{W}(1-0.19) = 4.03 \text{ W}$$

<u>modo TE01</u>



$$\Gamma_{23} = 0{,}522$$

$$\Gamma_{23}(d) = 0.552\, e^{j68.7^\circ}$$

$$\beta_2 = 176.5 \text{ [rad/m]}$$

$$Z_{L1} = 145{,}6 + j194.7 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$\Gamma_{12} = 0.63\, e^{j140^\circ} \qquad P_{ass,TE01} = 5\text{W}(1-0.396) = 3.02 \text{ W}$$

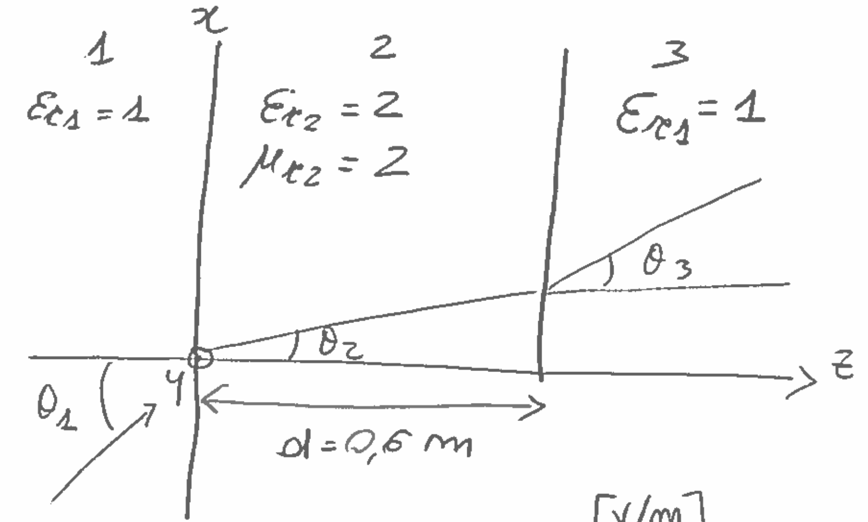
$$P_{TOT,ASS} = P_{ass,TE10} + P_{ass,TE01} \approx 7 \text{ W}$$

ESERCIZIO

Un'onda piana uniforme alla frequenza di 1 GHz incide sul multistrato in figura con un angolo $\theta_1 = 60°$

Il campo elettrico in (0,0,0) vale $\vec{E}(0,0,0) = j\,\hat{i}_y + \frac{1}{2}\hat{i}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}_z$ [V/m]

Calcolare densità di potenza trasmessa, polarizzazione onda riflessa, campo elettrico totale in $P(1,1,-1)$



$\theta_1 = \theta_3 = 60°$

$K_1 \sin\theta_1 = K_2 \sin\theta_2$

$\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\sin\theta_2$

$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}\sin\theta_1\right) = 25,65$

[V/m]

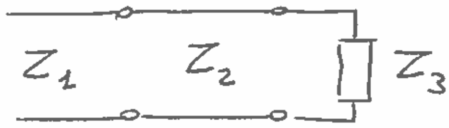
(TE) $\vec{E}_y = j\,\hat{i}_y \qquad |\vec{E}_y| = 1 \qquad \measuredangle \vec{E}_y = \frac{\pi}{2}$

(TM) $\vec{E} = \frac{1}{2}\hat{i}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}_z \qquad |E_{TM}| = 1 \qquad \measuredangle E_{TM} = 0$

[V/m]

polarizzazione circolare

Componente TE



$$Z_{TE,1} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\eta_0}{\cos 60°} = 754\ [\Omega]$$

$$Z_{TE,2} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_2} = \frac{(\eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}})\sqrt{\mu_{r2}}}{\cos\theta_2} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}\frac{1}{\cos\theta_2} = 418.25\ [\Omega]$$

$$\Gamma_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = 0,286 \qquad \lambda_0 = \frac{c}{f} = 30\ \text{cm}$$

$$\beta_{2z} = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta_2 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{\lambda_0}\cos\theta_2 = 37,76\ [\text{rad/m}]$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = 15\ \text{cm}$$

$$\Gamma_{23}(d) = \Gamma_{23}\, e^{-j2\beta_{2z}d} = 0{,}286\, e^{j\ldots}$$

$$Z_{L1} = Z_2 \frac{1 + \Gamma_{23}(d)}{1 - \Gamma_{23}(d)} = 381 - j\,236 \; [\Omega]$$

$$\Gamma_{12}^{TE} = \frac{Z_{L1} - Z_1}{Z_{L1} + Z_1} = -0{,}27 - j\,0{,}26 = 0{,}38\, e^{-j135°}$$

$$S_{p,z}^{(3)} = S_{p,1}^{(1)} \cos\theta_1 \left(1 - |\Gamma_{TE}|^2\right) = \frac{1}{2} \frac{|E_{TE}|^2}{\eta_0} \cos\theta_1 \left(1 - |\Gamma_{TE}|^2\right) = 5{,}7 \cdot 10^{-4} \; [W/m^2]$$

$$S_p^{(3)} = \frac{S_{p,z}^{(3)}}{\cos\theta_3} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \; [W/m^2]$$

Componente TM

$$Z_1^{TM} = \eta_0 \cos\theta_1 = 188{,}5 \; [\Omega]$$

$$Z_2^{TM} = \eta_2 \cos\theta_2 = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}} \cos\theta_2 = 339.82 \; [\Omega]$$

$$\Gamma_{23}^{TM} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = -0{,}286$$

$$\Gamma_{23}^{TM}(d) = \Gamma_{23}^{TM}\, e^{-j2\beta_{2z}d} = 0{,}286\, e^{+j97{,}59}$$

$$Z_{L1}^{TM} = Z_2 \frac{1 + \Gamma_{23}(d)}{1 - \Gamma_{23}(d)} = 269{,}4 + j\,166 \; [\Omega]$$

$$\Gamma_{12}^{TM} = \frac{Z_{L1} - Z_1}{Z_{L1} + Z_1} = 0{,}38\, e^{+j44°}$$

$$S_{p,z}^{(3)} = S_{p,1}^{(1)} \cos\theta_1 \left(1 - |\Gamma_{12}^{TM}|^2\right) = \frac{1}{2} \frac{|E_{TM}|^2}{\eta_0} \cos\theta_1 \left(1 - |\Gamma_{TM}|^2\right) = 5{,}7 \cdot 10^{-4} \; [W/m^2]$$

$$S_p^{(3)} = \frac{S_{p,z}^{(3)}}{\cos\theta_3} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \; [W/m^2]$$

Densità di potenza totale

$$S_{p,TOT}^{(3)} = S_{p,TE}^{(3)} + S_{p,TM}^{(3)} = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \; [W/m^2]$$

Il campo elettrico riflesso in (1,1,1) vale

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r,TE} + \vec{E}_{r,TH} = \vec{E}_{i,TE}\,\Gamma_{TE} + \vec{E}_{i,TH}\,\Gamma_{TH} =$$

$$= \underbrace{j\,\hat{i}_y\,0{,}38\,e^{-j135^\circ}}_{TE} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\hat{i}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}_z\right)0{,}38\,e^{j44^\circ}}_{TH} \quad [V/m]$$

$|E_{r,TE}| = 0{,}38 \quad [V/m] \qquad \measuredangle \vec{E}_{r,TE} = 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$

$|E_{r,TH}| = 0{,}38 \quad [V/m] \qquad \measuredangle \vec{E}_{r_{TE}} = 44^\circ$

Sono ancora sfasati di 90°
(polarizzazione circolare)

Campo elettrico totale in $P(1,1,-1)$

$$\vec{E}_T(x,y,z) = \vec{E}_i(x,y,z) + \vec{E}_r(x,y,z) = \ldots\ldots$$

$$=$$

Possiamo anche calcolare i campi trasmessi $\quad S_p^{(3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|E_3^+|^2}{\eta_0} = \dfrac{1}{2}\eta_0\,|H_3^+|^2$

<u>TE</u> $\qquad |E_3^+| = \left(2 S_p^{(3)}\,\eta_0\right)^{1/2} =$

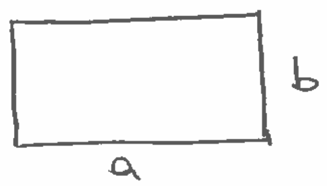
$$|H_3^+| = \frac{|E_3^+|}{\eta_0}$$

Se voglio calcolare anche la fase devo lavorare con i campi

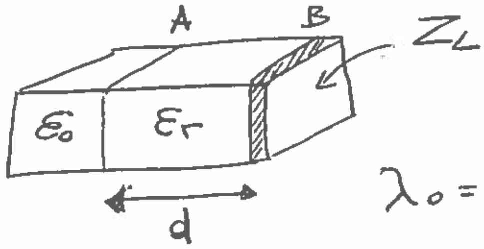
$$E_3^+ = E_1^+\,\frac{1+\Gamma_{23}}{1+\Gamma_{23}(d)}\,(1+\Gamma_{12})\,e^{-j\beta_{2z}d}$$

ESERCIZIO (Trasformatore $\lambda/4$ in guida d'onda)

Si consideri la guida rettangolare in figura con $a = 2$ cm e $b = 1$ cm, operante alla frequenza di 11 GHz, connessa ad un carico incognito Z_L.
Sapendo che il coefficiente di riflessione sul carico è $\Gamma_B = 0.3$, dimensionare una struttura dielettrica adattante (trasformatore $\lambda/4$)

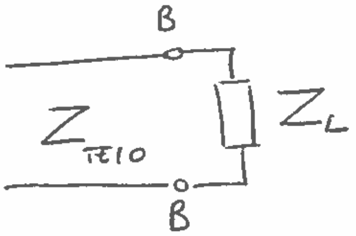


$a = 2$ cm
$b = 1$ cm
$f = 11$ GHz



$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2.73 \ [\text{cm}]$$

La guida chiusa sul carico è descritta dal modello a linee



Verifichiamo i modi che si propagano

$$\lambda_{c,10} = 2a = 4 \text{ cm} \qquad f_{c,10} = \frac{c}{\lambda_{c10}} = 7.5 \text{ GHz}$$

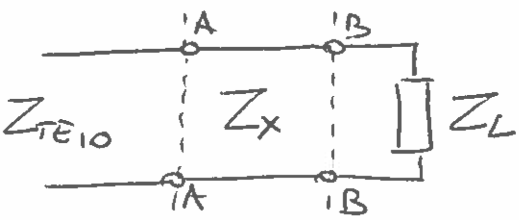
$$\underset{(2b)}{\lambda_{c,01}} = \underset{(a)}{\lambda_{c,20}} = 2 \text{ cm} \qquad f_{c,01} = \frac{c}{\lambda_{c01}} = 15 \text{ GHz}$$

A 11 GHz si propaga solo modo fondamentale

$$Z_{TE10} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1-\left(\frac{7.5}{11}\right)^2}} = 515.3 \ [\Omega]$$

$$\Gamma_B = \frac{Z_L - Z_{TE10}}{Z_L + Z_{TE10}} \Longrightarrow Z_L = Z_{TE10}\frac{1+\Gamma_B}{1-\Gamma_B} = 957 \ [\Omega]$$

Per realizzare un trasformatore $\lambda/4$



$$Z_x = \sqrt{Z_{TE10} Z_L} = \sqrt{515{,}3 \cdot 957} = 702 \ [\Omega]$$

dove $$Z_x = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Attenzione: La f_c cambia con ε_r

$$f_c = \frac{v}{\lambda_c} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda_c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f_c}{f} = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\lambda_0}{\lambda_c}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Quindi

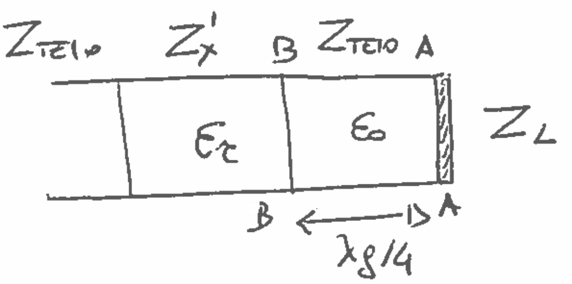
$$\left(\frac{Z_x}{\eta_0}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon_r\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right]} = \frac{1}{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\eta_0}{Z_x}\right)^2 = \varepsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 \Rightarrow \varepsilon_r = \left(\frac{\eta_0}{Z_x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2$$

$$= \left(\frac{377}{702}\right)^2 + \left(\frac{2.73}{4}\right) = 0.75$$

$\varepsilon_r < 1 \Rightarrow$ non accettabile

Per risolvere il problema possiamo pensare di introdurre un tratto di guida intermedio (invertente) che trasformi l'impedenza del carico



Per avere ancora un'impedenza reale mettiamo un tratto di guida $\lambda/4$ con impedenza $Z_{TE10} = 515\,\Omega$

Alla sezione B vedo un'impedenza

$$Z_{BB} = \frac{Z_{TE10}^2}{Z_L} = \frac{(515)^2}{957} = 277{,}14\ [\Omega] \Rightarrow Z_x' = \sqrt{Z_{BB} Z_{TE10}} = 378\ [\Omega]$$

La costante dielettrica che mi serve adesso è

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\eta_0}{Z_x'}\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{377}{378}\right)^2 + \left(\frac{2.73}{4}\right)^2 = 1.46$$ valore accettabile

Lunghezza geometrica del tratto di guida riempito di ε_r

$$d = \frac{\lambda_g}{4} = \frac{1}{4}\frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda_0^2}{\lambda_c^2}}} = \frac{1}{4}\frac{2.73/\sqrt{1{,}46}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1{,}46}\left(\frac{2.73}{4}\right)^2}} = 0{,}684\ \text{cm}$$