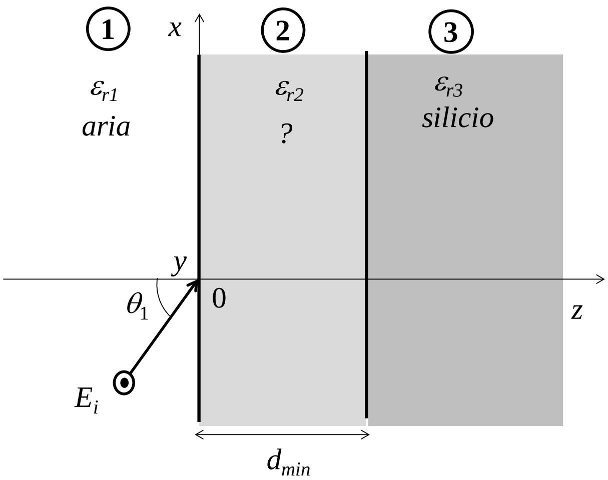
Esercizio 1

Si vuole massimizzare l'efficienza di un rivelatore di luce realizzato in silicio depositando sopra la superficie un sottile strato di materiale dielettrico (senza perdite). Lo strato deve garantire massimo trasferimento di potenza (dall'aria al silicio) per un'inda piana uniforme incidente con un angolo $\theta_1 = 77°$, frequenza $f = 500$ THz (1 THz = 10^{12} Hz) e campo elettrico orientato nella direzione $\mathbf{i}_y$.
Per il silicio si assuma $\varepsilon_{r3}' = 18.64$ e $\varepsilon_{r3}'' = 0.31$ alla frequenza di lavoro.

a) Progettare lo strato dielettrico, scegliendo una opportuna constante dielettrica ε_{r2} e minimo spessore $d_{\min}$ (*usare le opportune approssimazioni*)

b) Quantificare l'aumento della densità di potenza media trasmessa dall'aria al silicio per effetto dello strato dielettrico progettato al punto 1) rispetto al caso in cui lo strato intermedio sia assente.

c) Valutare se lo strato dielettrico dimensionato al punto 1) è vantaggioso anche per un'onda piana con campo magnetico orientato nella direzione $\mathbf{i}_y$ ($\theta_1 = 77°$, $f = 500$ THz).



Soluzione:
a) Dalla constante dielettrica del silicio, si evince che alla frequenza di lavoro il silicio si comporta da buon dielettrico. Infatti

$$\tan\delta = \frac{\varepsilon_{r3}''}{\varepsilon_{r3}'} = 0.017 << 1$$

Quindi possiamo dimensionare lo strato dielettrico trascurando la parte immaginaria della costante dielettrica del silicio.

Per progettare lo strato di adattamento $\lambda/4$ per l'onda incidente (polarizzata TE) dobbiamo innanzitutto calcolare l'impedenza d'onda del mezzo 1 (aria) e del mezzo 3 (silicio).

$$Z_{1,TE} = \frac{\eta_0}{\cos(\theta_1)} = \frac{120\pi}{\cos(77°)} = 1676\,[\Omega]$$
$$Z_{3,TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r3}'}\cos(\theta_3)} = \frac{120\pi}{\sqrt{18.64}\cos(13°)} = 89.6\,[\Omega]$$

dove l'angolo di propagazione nel silicio

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r3}^{i}}}\sin\vartheta_1\right) = 13°$$

si trova dalla legge di Snell.

Per avere adattamento λ/4, l'impedenza d'onda TE del mezzo 2 deve essere

$$Z_{2,TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}^{'}}\cos(\theta_2)} = \sqrt{Z_{1,TE} Z_{3TE}} = 387.5\,[\Omega] \quad \text{(A)}$$

L'angolo di propagazione θ_2 nello strato dielettrico deve rispettare la legge di Snell, cioè

$$\sin\vartheta_1 = \sqrt{\varepsilon_{r2}^{i}}\sin\vartheta_2 \qquad \text{(B)}$$

Mettendo a sistema le due condizioni (A) e (B) si trova

$$Z_{2,TE}\sin(\theta_1) = \eta_0 \tan(\theta_2)$$

da cui

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{Z_{2,TE}}{\eta_0}\sin(\theta_1)\right) = \tan^{-1}\left(\frac{387.5}{120\pi}\sin(77°)\right) = 45°$$

Quindi dalla (B) la costante dielettrica dello strato da utilizzare vale

$$\varepsilon_{r2}^{i} = \left(\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2}\right)^2 = \left(\frac{\sin 77°}{\sin 45°}\right)^2 = 1.9$$

Lo spessore dello strato dielettrico deve essere ¼ della lunghezza d'onda apparente nella direzione normale all'interfaccia, quindi

$$d = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\vartheta_2} = \frac{c}{4\sqrt{\varepsilon_{r2}}\,f\cos\vartheta_2} = \frac{3e8}{4\sqrt{1.9}\cdot 5e14\cdot\cos 45°} = 154e-9 = 154\,[\text{nm}]$$

b) In assenza dello strato dielettrico il coefficiente di riflessione del campo elettrico all'interfaccia tra aria e silicio vale

$$\Gamma_{1,3} = \frac{Z_{3,TE} - Z_{1,TE}}{Z_{3,TE} + Z_{3,TE}} = \frac{89.6[\Omega] - 1676[\Omega]}{89.6[\Omega] + 1676[\Omega]} = -0.9$$

Dalla conservazione del flusso di energia nella direzione ortogonale all'interfaccia si ottiene

$$S_1^+\cos\vartheta_1 - S_1^+\cos\vartheta_1 = S_1^+\left(1 - \left|\Gamma_{1,3}\right|^2\right)\cos\vartheta_1 = S_3^+\cos\vartheta_3$$

da cui

$$\frac{S_3^+}{S_1^+} = \frac{\left(1 - \left|\Gamma_{1,3}\right|^2\right)\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_3} = 4.4\%$$

In presenza dello strato dielettrico (adattamento λ/4) il coefficiente di riflessione del campo elettrico all'interfaccia tra aria e strato dielettrico è nullo, non c'è onda riflessa e quindi

$$\frac{S_3^+}{S_1^+} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_3} = 23\%$$

Quindi lo strato λ/4 permette di aumentare la trasmissione di potenza di un fattore 5.22.

b) Per l'onda TM conviene innanzitutto calcolare il coefficiente di riflessione in assenza di strato dielettrico. Calcoliamo le impedenze d'onda per la polarizzazione TM

$$Z_{1,TM} = \eta_0\cos(\theta_1) = 120\pi\cos(77°) = 84.8\,[\Omega]$$

$$Z_{3,TM} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r3}^{'}}}\cos(\theta_1) = \frac{120\pi}{\sqrt{18.64}}\cos(13°) = 85.1\,[\Omega]$$

Si osserva che l'incidenza avviene all'angolo di Brewster, quindi per la polarizzazione TM

$$\Gamma_{1,3} = \frac{Z_{3,TM} - Z_{1,TM}}{Z_{3,TM} + Z_{3,TM}} \approx 0$$

Quindi in assenza di strato dielettrico, l'onda TM è completamente trasmessa, non c'è onda riflessa e

$$\left(\frac{S_3^+}{S_1^+}\right)_{TM} = \frac{\cos\vartheta_{1_T}}{\cos\vartheta_3} = 23\%$$

In presenza di strato dielettrico bisogna calcolare il coefficiente di riflessione all'ingresso del multistrato.
All'interfaccia 2-3 tra multistrato e silicio si trova

$$\Gamma_{2,3} = \frac{Z_{3,TM} - Z_{2,TM}}{Z_{3,TM} + Z_{2,TM}} = \frac{85.1[\Omega] - 193.4[\Omega]}{85.1[\Omega] + 193.4[\Omega]} = -0.39$$

dove

$$Z_{2,TM} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\cos(\theta_2) = \frac{120\pi}{\sqrt{1.9}}\cos(45°) = 193.4\,[\Omega]$$

Facendo retropropagare il coefficiente di riflessione fino alla sezione 1-2, si trova

$$\Gamma_{2,3}(d_{\min}) = \Gamma_{2,3}\exp\left(-j2\beta_2\cos\vartheta_2 d_{\min}\right) = -0.39\exp\left(-j2\beta_2\cos 45°\cdot 154e-9\right) = 0.39$$

dove

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{2\pi\cdot 5e14}{3e8}\sqrt{1.9} = 1.44\cdot 10^6 [rad/m]$$

L'impedenza di carico equivalente vale quindi

$$Z_{1,L} = Z_{2,TM}\frac{1+\Gamma_{2,3}(d_{\min})}{1-\Gamma_{2,3}(d_{\min})} = 193.4\frac{1+0.39}{1-0.39} = 440[\Omega]$$

da cui il coefficinte di riflessione TM all'ingresso del multistrato vale

$$\Gamma_{1,2} = \frac{Z_{1,L} - Z_{1,TM}}{Z_{1,L} + Z_{1,TM}} = 0.67$$

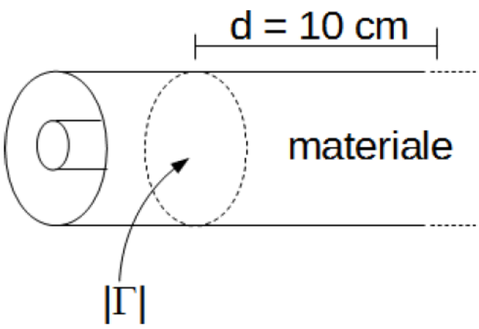
Dalla conservazione del flusso di energia nella direzione ortogonale all'interfaccia si ottiene da cui

$$\left(\frac{S_3^+}{S_1^+}\right)_{TM} = \frac{\left(1-\left|\Gamma_{1,2}\right|^2\right)\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_3} = 12.5\%$$

Quindi lo strato λ/4 (progettato per la polarizzazione TE) riduce la trasmissione di potenza della polarizzazione TM di un fattore 1.85.

Esercizio 2

Si vuole utilizzare un cavo coassiale (in aria) per misurare la costante dielettrica **complessa** di un materiale con piccole perdite alla frequenza di 20 GHz.
Per fare ciò si riempie il coassiale di materiale per un tratto lungo a sufficienza da dissipare tutta la potenza transitante nel materiale stesso. In tali condizioni si misura il seguente modulo del coefficiente di riflessione: $|\Gamma|=0.3$.
Si verifica inoltre che a 10 cm dalla sezione, la potenza trasmessa è di 20 dB inferiore a quella incidente.
Si calcoli **parte reale e parte immaginaria** della costante dielettrica del materiale.



Soluzione:
a) Poiché sappiamo che il dielettrico ha basse perdite, possiamo ricavare innanzitutto la parte reale della costante dielettrica lavorando nell'ipotesi di buon dielettrico.

L'impedenza caratteristica di un cavo coassiale è data dalla relazione

$$Z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r^{'}}}\log\frac{D_2}{D_1}$$

dove D_1 e D_2 sono rispettivamente il raggio esterno e interno dei conduttori che compongono il cavo.

Il coefficiente di riflessione Γ è dato dalla discontinuità introdotta dal dielettrico nell'impedenza caratteristica della linea, cioè

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon'_r} - 1}{1/\sqrt{\varepsilon'_r} + 1} = \frac{1-\sqrt{\varepsilon'_r}}{1+\sqrt{\varepsilon'_r}},$$

che dipende unicamente dalla costante dielettrica. Dall'espressione del coefficiente di riflessione, si evince che Γ deve essere negativo (fase 180°), quindi imponendo $\Gamma = -0.3$, si trova

$$\varepsilon'_r = \left(\frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{1+0.3}{1-0.3}\right)^2 = 3.45.$$

Per calcolare la parte immaginaria della costante dielettrica, possiamo utilizzare le approssimazioni valide nel caso di buon dielettrico, cioè

$$\beta = 2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon^{'}} = \frac{2\pi f}{v_0}\sqrt{\varepsilon_r^{'}} = \frac{2\pi\cdot 20\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\sqrt{3.45} = 778 \text{ [rad/m]}$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon_r^{''}}{2\varepsilon_r^{'}}\beta \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r^{''} = 2\varepsilon_r^{'}\frac{\alpha}{\beta}$$

La potenza $P(d)$ ad una distanza d dalla discontinuità è data dalla potenza trasmessa $P(0^+)$ (immediatamente dopo la discontinuità), attenuata dalla propagazione attraverso il mezzo dielettrico non ideale, cioé

$$P(d) = P(0^+)e^{-2ad}$$

Detta $P(0^-)$ la potenza incidente sulla discontinuità, la frazione trasmessa vale

$$\frac{P(0^+)}{P(0^-)} = 1 - \left|\Gamma\right|^2 = 91\%,$$

che corrisponde ad una riduzione di potenza di circa 0.4 dB. Questo significa che la propagazione attraverso il cavo coassiale introduce una perdita di 19.6 dB lungo il tratto di lunghezza d, cioé

$$\frac{P(d)}{P(0^+)} = e^{-2ad} = 0.011 \quad \text{(corrispondente ad una attenuazione di 19.6 dB)}$$

Da questa relazione si ottiene

$$\alpha = \frac{1}{2d}\ln(0.011) = 22.5 \text{ [Np/m]}$$

che corrisponde ad una parte immaginaria della costante dielettrica di

$$\varepsilon_r'' = 2\varepsilon_r' \frac{\alpha}{\beta} = 2 \cdot 3.45 \frac{22.5}{778} = 0.2$$

Se si fosse trascurata la perdita di potenza trasmessa dovuta alla riflessione (circa il 9%), il risultato sarebbe stato molto simile. Infatti in questo caso

$$\frac{P(d)}{P(0^+)} = e^{-2ad} = 0.01 \quad \text{(corrispondente ad una attenuazione di 20 dB tutta imputabile al cavo)}$$

Da cui

$$\alpha = \frac{1}{2d}\ln(0.011) = 23 \text{ [Np/m]}$$

che corrisponde ad una parte immaginaria della costante dielettrica di

$$\varepsilon_r'' = 2\varepsilon_r' \frac{\alpha}{\beta} = 2 \cdot 3.45 \frac{23}{778} = 0.204$$

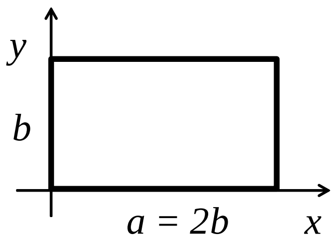
Esercizio 3

Una guida d'onda operante nel modo TE10 e con $a = 2b$ trasporta una potenza di 10 W (il mezzo interno è l'aria). Si calcoli, alla frequenza di centro banda monomodale:

- il campo elettrico in $x = a/4$, $y = b/2$;
- il campo magnetico nello stesso punto;
- la densità di potenza massima nella sezione della guida.

Si calcolino le stesse quantità se il coefficiente di riflessione è 0.5.

Soluzione



La potenza portata dal modo fondamentale TE10 di una guida d'onda rettangolare vale

$$P = \frac{ab}{4Z_{TE10}}|E_0|^2 = \frac{2a^2}{4Z_{TE10}}|E_0|^2 = \frac{a^2}{2Z_{TE10}}|E_0|^2,$$

dove Z_{TE10} è l'impedenza del modo TE10 e E_0 è il campo elettrico massimo (al centro della guida).

Assumendo un valore di a pari a 5 cm (scelta arbitraria) si trova che la frequenza di taglio del modo TE10 e del modo TE01 valgono rispettivamente

$$f_{c,10} = \frac{v}{\lambda_{c,10}} = \frac{v}{2a} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 0.05} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c,01} = \frac{v}{\lambda_{c,01}} = \frac{v}{2b} = \frac{3\cdot 10^8}{0.05} = 6 \text{ GHz}$$ (coincidente con la frequenza di taglio del modo TE20)

da cui la frequenza di centro banda monomodale vale $f_0 = 4.5$ GHz. A questa frequenza l'impedenza del modo TE10 vale

$$Z_{TE10} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c,10}}{f_0}\right)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4.5}\right)^2}} = 506 \ [\Omega]$$

Dall'espressione della potenza P possiamo ricavare il campo elettrico massimo nella guida

$$E_0 = \sqrt{\frac{4Z_{TE10}}{ab}P} = \sqrt{\frac{2Z_{TE10}}{a^2}P} = \sqrt{\frac{2\cdot 506}{0.05^2}10} = 4 \text{ kV/m}$$

Il campo elettrico in $x = a/4$, $y = b/2$ si calcola direttamente dalle espressioni del campo elettrico del modo fondamentale

$$E_y\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\Big|_{x=\frac{a}{4}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{a}{4}\right) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0 = 2.84 \text{ kV/m}$$

Analogamente il campo magnetico

$$H_x\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=-\frac{E_0}{Z_{TE10}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\Bigg|_{x=\frac{a}{4}}=-\frac{E_0}{Z_{TE10}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\text{-5.6 A/m}$$

La densità di potenza massima si trova al centro della guida, dove campo elettrico e campo magnetico sono massimi.

$$S_{\max}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{Z_{TE10}}=\frac{1}{2}\frac{\left|4\cdot 10^3\right|^2}{506}=15.8\ \ \text{kW/m}^2$$

Se il coefficiente di riflessione è Γ = 0.5, bisogna tener conto del contributo dell'onda contropropagante al campo elettrico e magnetico totale e alla potenza portata dalla guida. In queste condizioni il campo elettrico totale vale

$$E_y\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=E_y^+\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)+E_y^-\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=\Big|E_0\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(1+\Gamma)=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0(1+0.5)=4.26\ \text{kV/m}$$

Analogamente il campo magnetico, che vede un coefficiente di riflessione -Γ, vale

$$H_x\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=H_x^+\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)+H_x^-\left(\frac{a}{4},\frac{b}{2}\right)=\Big|-\frac{E_0}{Z_{TE10}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(1-\Gamma)=-\frac{\sqrt{2}}{2}E_0(0.5)=\text{-2.81 A/m}$$

La densità di potenza massima, data dal bilancio tra la potenza portata dal modo propagante e contropropagante, vale

$$S_{\max}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=S^+{}_{\max}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)-S^-{}_{\max}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{Z_{TE10}}\left(1-|\Gamma|^2\right)=11.8\ \ \text{kW/m}^2$$