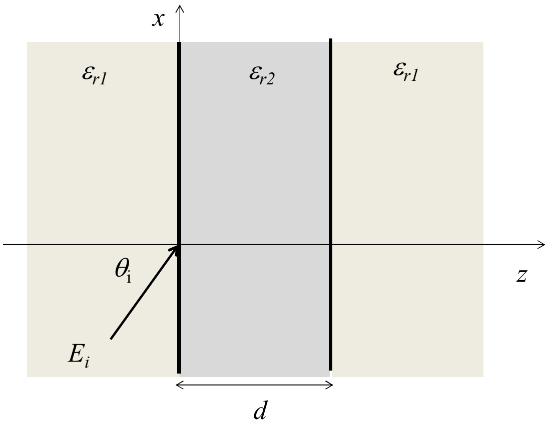
Esercizio (Incidenza obliqua)

Un'onda piana polarizzata circolarmente si propaga alla frequenza f_0 = 1GHz in un dielettrico (ε_{r1} = 3). Come mostrato in figura, l'onda incide con un angolo θ_i = 60° su uno strato dielettrico di spessore d e costante dielettrica ε_{r2}. Il vettore d'onda giace sul piano d'incidenza xz. La densità di potenza **totale** portata dall'onda incidente è S_i = 2 mW/m^2.

a) Sapendo che la componente con polarizzazione parallela (TM) viene trasmessa completamente per **qualunque spessore** d dello strato, calcolare la costante dielettrica ε_{r2};
b) assumendo spessore infinito dello strato d, calcolare la densità di potenza totale associata all'onda riflessa (S_i) e trasmessa (S_t);
c) calcolare il minimo spessore d_{min} (**non nullo**) dello strato che consente trasmissione totale dell'onda incidente (si assuma costante dielettrica ε_{r1} per $z > d_{min}$);
d) per lo spessore dello strato trovato al punto c), calcolare il modulo del campo elettrico totale associato alla componente TE e alla componente TM dell'onda al centro strato ($z = d_{min}/2$)



Soluzione:

a) Affinchè la componente TM dell'onda sia sempre interamente trasmessa par qualunque spessore dello strato intermedio è necessario che l'incidenza avvenga ad un angolo pari all'angolo di Brewster (in questo caso si ha adattamento di impedenza tra i tre strati, cioè $Z_1^{TM} = Z_2^{TM} = Z_1^{TM}$).

Dalla condizione

$$\vartheta_i = \vartheta_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1} \qquad \text{si trova} \quad n_2 = n_1 \tan\vartheta_i = \sqrt{\varepsilon_{r1}}\tan\vartheta_i = \sqrt{3}\tan 60° = 3$$

$$\text{da cui} \quad \varepsilon_{r2} = 9$$

b) Poiché la polarizzazione di ingresso è circolare, la densità di potenza S_i è distribuita in parti uguali tra la componente TE e la componente TM dell'onda, che portano ciascuna una densità di potenza di $S_{i,TE} = S_{i,TM}$ =1 mW/m^2.

La componente TM è interamente trasmessa, quindi non contribuisce alla densità di potenza dell'onda riflessa ($S_{r,TM}$ = 0), mentre per l'onda trasmessa $S_{t,TM}$ =1 mW/m^2).

Per la componente TE calcoliamo il coefficiente di riflessione all'interfaccia.

$$Z_1^{TE} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_1} = 435.3\,[\Omega]$$

$$Z_2^{TE} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_2} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\theta_2} = 145.1\,[\Omega]$$

$$\Gamma^{TE} = \frac{Z_2^{TE} - Z_1^{TE}}{Z_2^{TE} + Z_1^{TE}} = -0.5$$

Dalla definizione di densità di potenza, il campo elettrico associato all'onda TE incidente vale

$$|E_i| = \sqrt{\frac{2S_{i,TE}\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.001\cdot 120\pi}{\sqrt{3}}} = 0.66 \ \text{[V/m]}$$

da cui si ricavano il campo TE riflesso

$$|E_r| = \left|\Gamma^{TE} E_i\right| = |-0.5\cdot 0.66| = 0.33 \ \text{[V/m]}$$

associato ad una densità di potenza

$$S_{r,TE} = \frac{1}{2}\frac{|E_r|^2}{\eta_1} = 0.25 \ [\text{mW/m}^2]$$

e il campo TE trasmesso

$$|E_t| = \left|(1+\Gamma^{TE})E_i\right| = (1-0.5)\cdot 0.66 = 0.33 \ \text{[V/m]}$$

$$S_{t,TE} = \frac{1}{2}\frac{|E_t|^2}{\eta_2} = 0.433 \ [\text{mW/m}^2]$$

La densità di potenza totale dell'onda riflessa è quindi $S_r = S_{r,TE} = 0.25 \ [\text{mW/m}^2]$,
mentre la densità di potenza totale dell'onda trasmessa è $S_t = S_{t,TE} + S_{t,TM} = 0.433 + 0.577 = 1.1 \ [\text{mW/m}^2]$ (si veda il punto b qui sotto per il calcolo della parte TM).

c) Per avere trasmissione totale dell'onda polarizzata circolarmente attraverso lo strato interposto tra due semispazi dello stesso dielettrico, è necessario che per la polarizzazione TE lo strato abbia uno spessore multiplo di $\lambda_z/2$, dove λ_z è la lunghezza d'onda apparente nella direzione z.
Quindi basta imporre

$$d = m\frac{\lambda_z}{2} = m\frac{\lambda_0}{2\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\theta_2} = m\frac{c}{2f_0\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\theta_2} = m\frac{c}{f_0 3\sqrt{3}}$$

Lo spessore minimo si ottiene per m=1, da cui si trova

$$d_{\min} = \frac{c}{f_0 3\sqrt{3}} = 5.77 \ \text{[cm]}$$

d) Per calcolare il campo all'interno dello strato conviene separare la componente TE e la componente TM

Per l'onda TM, siccome non ci sono riflessioni alle interfacce, all'interno dello strato dielettrico intermedio c'è solo l'onda progressiva.
Dalla conservazione della potenza,

$$S_{1,TM}\cos\vartheta_i = S_{2,TM}\cos\vartheta_2 \quad \text{si trova}$$

$$S_{2,TM} = S_{1,TM}\frac{\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta_2} = 0.001\frac{\cos 60°}{\cos 30°} = 0.577 \, [\text{mW/m}^2]$$

da cui il campo elettrico associato all'onda TM nel mezzo intermedio vale

$$|E_{2,TM}| = \sqrt{\frac{2S_{2,TM}\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0.001\cdot 120\pi}{\sqrt{9}}} = 0.381 \ \text{[V/m]}\cdot$$

Per l'onda TE bisogna considerare che esiste sia una componente progressiva che una regressiva.
Poiché tutta l'onda TE viene trasmessa, il campo elettrico (tangenziale) alla seconda interfaccia vale

$$\left|E_3^+\right| = \left|E_1^+\right| = 0.66 \ \text{[V/m]}$$

Quindi il campo elettrico totale alla sezione $z=d_{\min}$ vale

$$|E(d_{\min})| = \left|E_3^+\right| = \left|E_2^+(d_{\min}) + E_2^-(d_{\min})\right| = \left|E_2^+\right|\left|[1+\Gamma(d_{\min})]\right| = \left|E_2^+\right|[1+0.5] = 1.5\left|E_2^+\right|$$

da cui

$$\left|E_2^+\right| = \frac{\left|E_3^+\right|}{1.5} = 0.44 \, \text{[V/m]}$$

Quindi il modulo del campo elettrico totale associato all'onda TE alla sezione $z=d_{\min}/2$ vale

$$\left|E_{2,TE}(d/2)\right| = \left|E_2^+\right|\left|1+\Gamma(d)\right| = \left|E_2^+\right|\left|1+0.5e^{-j2\beta d_{\min}/2}\right| = 0.44|1-0.5| = 0.22 \, \text{[V/m]}$$

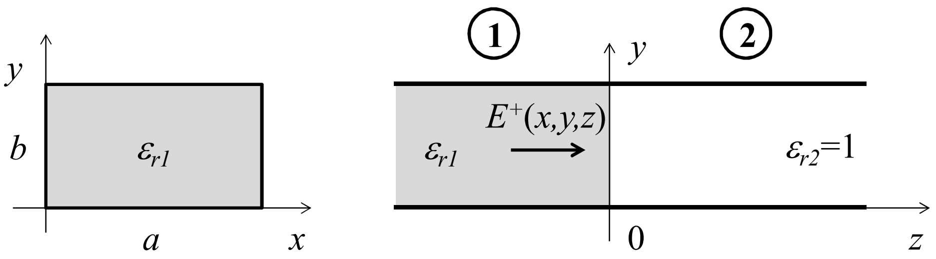
Esercizio (Guide d'onda)

Si consideri il caso mostrato in figura in cui un'onda elettromagnetica alla frequenza f_0 = 1.8 [GHz] si propaga (nella direzione +z) in una guida d'onda rettangolare riempita con un materiale (non magnetico, senza perdite) con costante dielettrica ε_{r1} = 2.25. L'onda si propaga con una constante di fase β = 21.33 [rad/m] e la guida ha dimensioni a = 10 cm e b = 6 cm.

Alla coordinata z = 0, viene rimosso il materiale dielettrico dalla guida.

Sapendo che il campo elettrico incidente $E^+(a/2,b/2,0)$ al centro della guida ($x=a/2$, $y=b/2$) sulla sezione z = 0 è pari a E_c = 1 [V/m], calcolare

a) valore del campo elettrico incidente $E^+(a/3, b/2,0)$ nel punto $x=a/3, y=b/2, z = 0$.
b) coefficiente di riflessione Γ (modulo e fase) alla sezione z = 0;
c) minima distanza dalla discontinuità (z<0) alla quale il campo elettrico **in modulo** è minimo, calcolare il valore del campo elettrico e commentare il risultato.
d) densità di potenza reale trasmessa dall'onda nel mezzo 2 (z > 0).
e) discutere qualitativamente come cambierebbero i risultati dei punti precedenti se la frequenza dell'onda (stesso modo di propagazione) fosse f_1= 1.5 [GHz] e f_2 = 2.8 [GHz].



Soluzione:

a) Prima di tutto bisogna individuare quale modo si sta propagando. Nel tratto di guida d'ingresso riempito di dielettrico, alla frequenza f_0 =1.8 GHz (λ_0 = 16.67 cm) possono propagarsi solo i modi TE10 e TE01. Infatti:

TE10 $\lambda_{c,10}$ = 2a = 20 cm $$f_{c,10} = \frac{v}{\lambda_{c,10}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\lambda_{c,10}} = \frac{3e8}{\sqrt{2.25}\cdot 0.2} = 1\,[\text{GHz}] < f_0$$

TE01 $\lambda_{c,01}$ = 2b = 12 cm $$f_{c,01} = \frac{v}{\lambda_{c,01}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\lambda_{c,01}} = \frac{3e8}{\sqrt{2.25}\cdot 0.12} = 1.67\,[\text{GHz}] < f_0$$

TE20 $\lambda_{c,20}$ = a = 10 cm $$f_{c,20} = \frac{v}{\lambda_{c,20}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\lambda_{c,20}} = \frac{3e8}{\sqrt{2.25}\cdot 0.1} = 2\,[\text{GHz}] > f_0$$

Per capire quale modo si sta effettivamente propagando, calcoliamo la costante di fase β dei modi TE10 e TE01 nel tratto di guida in ingresso,

$$\beta_{10} = \frac{2\pi}{\lambda_{g,10}} = \frac{2\pi}{\lambda_0\sqrt{\varepsilon_{r1}}}\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,10}}\right)^2} = \frac{2\pi}{0.1667\sqrt{2.25}}\sqrt{1-\frac{1}{2.25}\left(\frac{0.1667}{0.2}\right)^2} = \frac{2\pi}{0.1337} = 47\,[\text{rad/m}]$$

$$\beta_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_{g,01}} = \frac{2\pi}{\lambda_0\sqrt{\varepsilon_{r1}}}\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,01}}\right)^2} = \frac{2\pi}{0.1667\sqrt{2.25}}\sqrt{1-\frac{1}{2.25}\left(\frac{0.1667}{0.12}\right)^2} = \frac{2\pi}{0.2946} = 21.33\,[\text{rad/m}]$$

Quindi si sta propagando il modo TE10 con lunghezza d'onda in guida $\lambda_{g,01}$ = 29.46 [cm].
Analogamente si poteva ricavare analiticamente l'espressione che lega la lunghezza d'onda di taglio alla costante di fase β

$$\lambda_c = \frac{(2\pi\lambda_0)^2}{4\pi^2\varepsilon_{r1} - \beta^2\lambda_0^2}$$

Infatti, sostituendo i valori del problema si trova λ_c = 12 cm = 2b, che corrisponde alla lunghezza d'onda di taglio del modo TE01.
Il campo elettrico del modo TE01 ha solo componente E_x e (per la sola onda incidente) vale

$$E_x(x, y, 0) = E_c \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right),$$

cioè non dipende dalla coordinata *x*. Quindi

$$E_x\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}, 0\right) = E_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) = 1\,[\text{V/m}]$$

b) Calcoliamo le frequenza di taglio nella guida vuota (z>0).

$$f_{c,10} = \frac{c}{\lambda_{c,10}} = \frac{3e8}{0.2} = 1.5\,[\text{GHz}]$$

$$f_{c,01} = \frac{c}{\lambda_{c,01}} = \frac{3e8}{0.12} = 2.5\,[\text{GHz}]$$

Quindi alla frequenza f_0 =1.8 GHz il modo TE01 in arrivo dalla prima guida non si può propagare nel secondo tratto di guida, quindi ci aspettiamo riflessione totale alla sezione z = 0, cioè $|\Gamma|$=1.

Per calcolare il coefficiente di riflessione complesso, calcoliamo le impedenze d'onda del modo TE01 nelle due guide

$$Z_1^{TE01} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,01}}\right)^2}} = 666\,[\Omega]$$

$$Z_2^{TE01} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,01}}\right)^2}} = j391\,[\Omega]$$

da cui si trova

$$\Gamma = \frac{Z_2^{TE01} - Z_1^{TE01}}{Z_2^{TE01} + Z_1^{TE01}} = -0.488 + j0.873 = 1e^{j119°} = 1e^{j2.08}$$

c) Il campo elettrico totale (a centro guida) nel mezzo 1 (z<0) ha la forma

$$E_{c,TOT} = E_c^+(z) + E_c^-(z) = E_c^+[1 + \Gamma(z)] = E_c^+[1 + \Gamma(0)e^{j2\beta z}] = 1[\text{V/m}][1 + e^{j2.08}e^{j2\beta z}]$$

La distanza alla quale il campo totale è minimo è quella alla quale la fase del coefficiente di riflessione $\Gamma(z)$ diventa un multiplo dispari di π (in queste condizioni onda progressiva e onda regressiva sono in controfase)

$$d = \frac{2.08 + \pi\,[\text{rad}]}{2\beta} = 12.24\ [\text{cm}]$$

Il campo elettrico in questo punto è nullo perché per effetto della riflessione totale nel tratto di onda di ingresso si forma un'onda puramente stazionaria.

d) Avendo riflessione totale alla sezione z=0, non c'è trasferimento di potenza nel mezzo 2. Tutta la potenza reale portata in direzione +z dall'onda progressiva è portata indietro dall'onda riflessa.

e) Alla frequenza f_1 =1.5 GHz il modo TE01 non può propagarsi nella guida di ingresso.
Alla frequenza f_1 = 2.8 GHz il modo TE01 può propagarsi anche nella guida di uscita, quindi non ha più riflessione totale e andamento evanescente nel mezzo 2.